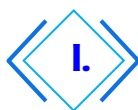


MỤC LỤC

Chủ đề ④ NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 1



I. BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ THƯỜNG GẶP

.....1



II. CÁC DẠNG TOÁN

.....1

1. Dạng 1. $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$ 1

a. Phương pháp tính 1

b. Chú ý.....2

c. Ví dụ áp dụng.....2

2. Dạng 2. $I = \int \tan(x+a)\tan(x+b)dx$ 3

a. Phương pháp tính 3

b. Chú ý.....4

c. Ví dụ áp dụng.....4

3. Dạng 3. $I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$ 6

a. Phương pháp tính 6

b. Ví dụ áp dụng.....6

4. Dạng 4. $I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$ 7

a. Phương pháp tính 7

b. Ví dụ áp dụng.....7

5. Dạng 5. $I = \int \frac{dx}{a.\sin^2 x + b.\sin x \cos x + c.\cos^2 x}$ 8

a. Phương pháp tính 8

b. Ví dụ áp dụng.....8

6. Dạng 6. $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx$ 9

a. Phương pháp tính 9

b. Ví dụ áp dụng.....9

c. Chú ý.....10

7. Dạng 7. Biến đổi đưa về nguyên hàm cơ bản hoặc 6 dạng ở trên.....12

Ví dụ áp dụng.....12



<https://luyenthitranghien.vn>



<https://www.facebook.com/luatqltd>



Chú ý ④

NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



I. BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ THƯỜNG GẶP

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = ax + b; a \neq 0$)
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan u du = -\ln \cos u + C$	$\int \tan(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax + b) + C$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot u du = \ln \sin u + C$	$\int \cot(ax + b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left \tan \frac{x}{2}\right + C$	$\int \frac{1}{\sin u} du = \ln\left \tan \frac{u}{2}\right + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax + b)} = \frac{1}{a} \ln\left \tan \frac{ax + b}{2}\right + C$
$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C$	$\int \frac{1}{\cos u} du = \ln\left \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C$	$\int \frac{dx}{\cos(ax + b)} = \frac{1}{a} \ln\left \tan\left(\frac{ax + b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right + C$

II. CÁC DẠNG TOÁN

1. Dạng 1. $I = \int \frac{dx}{\sin(x + a)\sin(x + b)}$

a. Phương pháp tính

Dùng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin(a - b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin[(x + a) - (x + b)]}{\sin(a - b)} = \frac{\sin(x + a)\cos(x + b) - \cos(x + a)\sin(x + b)}{\sin(a - b)}$$

Từ đó suy ra:

$$I = \frac{1}{\sin(a - b)} \int \frac{\sin(x + a)\cos(x + b) - \cos(x + a)\sin(x + b)}{\sin(x + a)\sin(x + b)} dx$$



$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\ln|\sin(x+b)| - \ln|\sin(x+a)| \right] + C$$

b. Chú ý

Với cách này, ta có thể tìm được các nguyên hàm:

- $J = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$
- $K = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$

c. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

 Giải

Ta có: $1 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - x\right]}{\frac{1}{2}} = 2 \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x \right]$

Từ đó: $I = 2 \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx = 2 \int \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \right] dx$

$$= 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - 2 \int \frac{d\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = 2 \ln \left| \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \right| + C$$

Ví dụ 2

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{\cos 3x \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$

 Giải

Ta có:

$$1 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left[\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 3x\right]}{\frac{1}{2}} = 2 \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \cos 3x - \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \sin 3x \right]$$

Từ đó:



$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int \frac{\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \cos 3x - \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \sin 3x}{\cos 3x \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} dx = 2 \int \frac{\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} dx - 2 \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx \\
 &= -\frac{2}{3} \int \frac{d\left(\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} + \frac{2}{3} \int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\cos 3x}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} \right| + C
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}$

 Giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } 1 &= \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &= \sqrt{2} \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \right] \\
 \text{Từ đó: } I &= \sqrt{2} \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} dx \\
 &= \sqrt{2} \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx + \sqrt{2} \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} dx \\
 &= \sqrt{2} \int \frac{d\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} - \sqrt{2} \int \frac{d\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} \right| + C
 \end{aligned}$$

2. Dạng 2. $I = \int \tan(x+a) \tan(x+b) dx$

a. Phương pháp tính

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } \tan(x+a) \tan(x+b) &= \frac{\sin(x+a) \sin(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} \\
 &= \frac{\sin(x+a) \sin(x+b) + \cos(x+a) \cos(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó: } I = \cos(a-b) \int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1$$

Đến đây ta gặp bài toán tìm nguyên hàm ở **Dạng 1**.



b. Chú ý

Với cách này, ta có thể tính được các nguyên hàm:

$$\begin{aligned} \bullet J &= \int \cot(x+a) \cot(x+b) dx \\ \bullet K &= \int \tan(x+a) \tan(x+b) dx \end{aligned}$$

c. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} - 1 \\ &= \frac{\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó: } I = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx - \int dx = \frac{\sqrt{3}}{2} I_1 - x + C$$

$$\text{Tính } I_1 = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\text{Ta có: } 1 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\text{Từ đó: } I_1 = 2 \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx$$



$$= 2 \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx - 2 \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx = 2 \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| + C$$

$$\text{Suy ra: } I = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| - x + C = \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| - x + C$$

Ví dụ 5

Tìm nguyên hàm sau đây: $K = \int \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$

 Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + 1 \\ &= \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó: } K = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx + \int dx = \frac{1}{2} K_1 + x + C$$

Đến đây, bằng cách tính ở Dạng 1, ta tính được:

$$K_1 = \int \frac{dx}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| + C$$

$$\text{Suy ra: } K = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| + x + C$$



3. Dạng 3. $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$

a. Phương pháp tính

$$\begin{aligned} \text{Có: } a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) \\ &\Rightarrow a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) \\ &\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \tan \frac{x + \alpha}{2} \right| + C \end{aligned}$$

b. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 6

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{2dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x}$

 Giải

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x} = \int \frac{dx}{\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = \int \frac{d \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = \ln \left| \tan \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| + C \end{aligned}$$

Ví dụ 7

Tìm nguyên hàm sau đây: $J = \int \frac{dx}{\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x}$

 Giải

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right)} = -\frac{1}{4} \int \frac{d \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right)} \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{\frac{\pi}{6} - 2x}{2} \right| + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{12} - x \right) \right| + C \end{aligned}$$



4. Dạng 4. $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

a. Phương pháp tính

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

b. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 8

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{3 \cos x + 5 \sin x + 3}$

 Giải

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } I &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{3-3t^2+10t+3+3t^2} = \int \frac{2dt}{10t+6} \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{d(5t+3)}{5t+3} = \frac{1}{5} \ln|5t+3| + C = \frac{1}{5} \ln \left| 5 \tan \frac{x}{2} + 3 \right| + C \end{aligned}$$

Ví dụ 9

Tìm nguyên hàm sau đây: $J = \int \frac{2dx}{2 \sin x - \cos x + 1}$

 Giải

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } J &= \int \frac{2 \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{4dt}{4t - 1 + t^2 + 1 + t^2} = \int \frac{4dt}{2t^2 + 4t} = 2 \int \frac{dt}{t(t+2)} \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \ln|t| - \ln|t+2| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 2 \right| + C \end{aligned}$$

Ví dụ 10

Tìm nguyên hàm sau đây: $K = \int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$

 Giải

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } K &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{1}{2} \ln|t| - \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

5. Dạng 5. $I = \int \frac{dx}{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x}$

a. Phương pháp tính

$$I = \int \frac{dx}{(a \tan^2 x + b \tan x + c) \cdot \cos^2 x}$$

$$\text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt. \text{ Suy ra } I = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}$$

b. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 11

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$

 Giải

$$I = \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(3 \tan^2 x - 2 \tan x - 1) \cos^2 x}$$

$$\text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{3t^2 - 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t-1)(3t+1)}$$



$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{3}{3t+1} \right) dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4} \int \frac{d(3t+1)}{3t+1}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{3t+1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{3 \tan x + 1} \right| + C$$

Ví dụ 12

Tìm nguyên hàm sau đây: $J = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x}$

 Giải

Đặt $\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$

$$\Rightarrow J = \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 2} = \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\tan x - 1 - \sqrt{3}}{\tan x - 1 + \sqrt{3}} \right| + C$$

6. Dạng 6. $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx$

a. Phương pháp tính

Ta tìm A, B sao cho:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)$$

b. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 13

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$

 Giải

Ta tìm A, B sao cho:

$$4 \sin x + 3 \cos x = A(\sin x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \sin x)$$

$$\Rightarrow 4 \sin x + 3 \cos x = (A - 2B) \sin x + (2A + B) \cos x \Rightarrow \begin{cases} A - 2B = 4 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

Từ đó: $I = \int \frac{2(\sin x + 2 \cos x) - (\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} dx$

$$= 2 \int dx - \int \frac{d(\sin x + 2 \cos x)}{\sin x + 2 \cos x} = 2x - \ln |\sin x + 2 \cos x| + C$$

Ví dụ 14

Tìm nguyên hàm sau đây: $J = \int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{\cos x - 4 \sin x} dx$

 Giải

Ta tìm A, B sao cho:

$$3 \cos x - 2 \sin x = A(\cos x - 4 \sin x) + B(-\sin x - 4 \cos x)$$



$$\Rightarrow 3\cos x - 2\sin x = (A - 4B)\cos x + (-4A - B)\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - 4B = 3 \\ 4A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{11}{17} \\ B = -\frac{10}{17} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } J &= \int \frac{\frac{11}{17}(\cos x - 4\sin x) - \frac{10}{17}(-\sin x - 4\cos x)}{\cos x - 4\sin x} dx \\ &= \frac{11}{17} \int dx - \frac{10}{17} \int \frac{d(\cos x - 4\sin x)}{\cos x - 4\sin x} = \frac{11}{17}x - \frac{10}{17} \ln|\cos x - 4\sin x| + C \end{aligned}$$

c. Chú ý

1. Nếu gặp $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a_2 \sin x + b_2 \cos x)^2} dx$ ta vẫn tìm A, B sao cho:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)$$

2. Nếu gặp $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$ ta tìm A, B sao cho:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x) + C$$

Ví dụ 15

$$\text{Tìm nguyên hàm sau đây: } I = \int \frac{8\cos x}{(\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2} dx$$

 Giải

Ta tìm A, B sao cho:

$$8\cos x = A(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + B(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow 8\cos x = (A\sqrt{3} - B)\sin x + (A + B\sqrt{3})\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\sqrt{3} - B = 0 \\ A + B\sqrt{3} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó: } I = \int \frac{2(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x - \sin x)}{(\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} + 2\sqrt{3} \int \frac{d(\sqrt{3}\sin x + \cos x)}{(\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2} = 2I_1 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} + C$$

$$\text{Tìm } I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}}$$



$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| + C$$

$$\text{Vậy } I = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} + C$$

Ví dụ 16

Tìm nguyên hàm sau đây: $J = \int \frac{8\sin x + \cos x + 5}{2\sin x - \cos x + 1} dx$

 **Giải**

Ta tìm A, B, C sao cho:

$$8\sin x + \cos x + 5 = A(2\sin x - \cos x + 1) + B(2\cos x + \sin x) + C$$

$$\Rightarrow 8\sin x + \cos x + 5 = (2A + B)\sin x + (-A + 2B)\cos x + A + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A + B = 8 \\ -A + 2B = 1 \\ A + C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó: } J = \int \frac{3(2\sin x - \cos x + 1) + 2(2\cos x + \sin x) + 2}{2\sin x - \cos x + 1} dx$$

$$= 3 \int dx + 2 \int \frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x - \cos x + 1} dx + 2 \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1}$$

$$= 3x + 2 \ln |2\sin x - \cos x + 1| + 2J_1$$

$$\text{Tìm } J_1 = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1}$$

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_1 = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t} = \int \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t}{t+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + C$$

$$\text{Vậy: } J = 3x + 2 \ln |2\sin x - \cos x + 1| + \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + C$$



7. Dạng 7. Biến đổi đưa về nguyên hàm cơ bản hoặc 6 dạng ở trên

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 17

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \cos 3x \cos 4x dx$

 Giải

$$\begin{aligned} I &= \int \cos 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 7x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x dx + \frac{1}{2} \int \cos 7x dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{14} \sin 7x + C \end{aligned}$$

Ví dụ 18

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \cos x \sin 2x \cos 3x dx$

 Giải

$$\begin{aligned} I &= \int \cos x \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x (\cos 2x + \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{4} \int \sin 2x d(\sin 2x) + \frac{1}{4} \int (-\sin 2x + \sin 6x) dx \\ &= \frac{1}{8} \sin^2 2x + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{24} \cos 6x + C \end{aligned}$$

Ví dụ 19

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) dx$

 Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) &= \frac{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}{\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)} \\ &= \frac{\sin x \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos x \left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sin x \left(1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)}{\cos x \left(2\cos^2 x - 1 - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin x (3 - 4\sin^2 x)}{\cos x (4\cos^2 x - 3)} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó: } I = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = -\frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + C$$

Ví dụ 20

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \sin^3 x \sin 3x dx$

 Giải

$$\text{Ta có: } \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$



$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin^3 x \sin 3x &= \frac{3\sin x - 4\sin 3x}{4} \cdot \sin 3x \\ &= \frac{3}{4} \sin x \sin 3x - \frac{1}{4} \sin^2 3x = \frac{3}{8} (\cos 2x - \cos 4x) - \frac{1}{8} (1 - \cos 6x) \\ &= \frac{3}{8} \cos 2x - \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 6x - \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Từ đó: } I &= \int \left(\frac{3}{8} \cos 2x - \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 6x - \frac{1}{8} \right) dx \\ &= \frac{3}{16} \sin 2x - \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin 6x - \frac{1}{8} x + C\end{aligned}$$

Ví dụ 21

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int (\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x) dx$

 Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \sin^3 x &= \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \\ \cos^3 x &= \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra: } \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x &= \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \cdot \sin 3x \\ &= \frac{3}{4} \sin x \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 3x \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \sin 3x + \frac{1}{4} \cos 3x \sin 3x \\ &= \frac{3}{8} [\sin(-2x) + \sin 4x] + \frac{3}{8} [\sin(-2x) - \sin 4x] = -\frac{3}{4} \sin 2x\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{3}{4} \int \sin 2x dx = \frac{3}{8} \cos 2x + C$$

Ví dụ 22

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

 Giải

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\tan x} (1 + \tan^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t^2 + t}{t} dt = \int t dt + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} t^2 + \ln|t| + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\tan x| + C$$

Ví dụ 23

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$

 Giải

$$\text{Đặt } \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^4 (1-t^2)} = \int \frac{1-t^4+t^4}{t^4 (1-t^2)} dt = \int \frac{1+t^2}{t^4} dt + \int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = -\frac{1}{3} t^{-3} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$



$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$$

Ví dụ 24

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{\sin 3x \sin 4x}{\tan x + \tan 2x} dx$

 Giải

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin 3x \sin 4x}{\tan x + \tan 2x} dx = \int \frac{\sin 3x \sin 4x}{\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}} dx = \int \sin 4x \cos 2x \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x \cos x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos x dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\sin 7x + \sin 5x) dx + \frac{1}{4} \int (\sin 3x + \sin x) dx \\ &= -\frac{1}{28} \cos 7x - \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x + C \end{aligned}$$

Ví dụ 25

Tìm nguyên hàm sau đây: $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$

 Giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{\sin x} \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ v = -\cot x \end{cases} \\ \Rightarrow I &= -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \frac{\cot x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cot x}{\sin x} - I_1 \\ \text{Tính } I_1 &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - \int \frac{dx}{\sin x} = I - \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \\ \Rightarrow I &= -\frac{\cot x}{\sin x} - I_1 = -\frac{\cot x}{\sin x} - I + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \\ \Rightarrow 2I &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{\cot x}{\sin x} + C \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{\cot x}{2 \sin x} + C \end{aligned}$$

