

SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH

KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI 12

CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 5

Năm học 2026 - 2027

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Đề thi có 4 trang)

Ngày thi: 22/10/2026

Thời gian làm bài: 180 phút

(Không kể thời gian giao đề)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (6 điểm). Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án. Mỗi câu trả lời đúng được 0,4 điểm.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là tập $\mathbb{R}$.

- A. $m = 2$. B. $m < 2$. C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. D. $-2 < m < 2$.

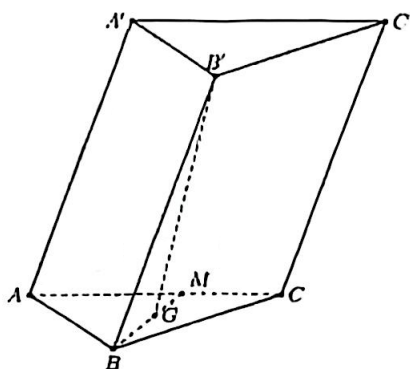
Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(-4; -3)$. C. $(-2; -1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2\sqrt{13}a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{ABC} = 30^\circ$, góc giữa cạnh bên CC' và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng



A. $\frac{33\sqrt{39}a^3}{4}$.

B. $\frac{9\sqrt{13}a^3}{2}$.

C. $\frac{99\sqrt{13}a^3}{8}$.

D. $\frac{27\sqrt{13}a^3}{2}$.

Câu 4. Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} + ax + b \right) = 1$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a + b$ bằng

A. -2 .

B. 2 .

C. 1 .

D. 0 .

Câu 5. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị đo là kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu X di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(560; 173; 21)$ đến điểm B trong 45 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 30 phút tiếp theo là $C(3200; 2134; 234)$. Tọa độ vị trí điểm $B(a; b; c)$, tính $S = a + 5b - 5c$.



A. 5872.

B. 6934.

C. 8148.

D. 9636.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC , G là trọng tâm tam giác BCD . Chọn phát biểu đúng.

A. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

B. $\overrightarrow{MG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

C. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{MG} = \frac{7}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Câu 7. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trong không gian thỏa mãn: $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ (M không trùng với các điểm A, B, C và gốc O). Tính $x_M + y_M + z_M$.

A. 4 .

B. 0 .

C. 3 .

D. 2 .

Câu 8. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một chi nhánh của doanh nghiệp A được ghi lại dưới bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Hãy tính tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên? (giá trị gần nhất).

A. 7,86.

B. 7,68.

C. 7,81.

D. 7,56.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{3x-5}{x-2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho tại điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị bằng

- A. -1. B. 1. C. -2. D. 3.

Câu 10. Biết tổng $S = \log_5 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \log_5 \left(1 - \frac{1}{2026^2}\right) = \log_5 \frac{a}{b}$ với a, b là những số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $2a - b$ bằng

- A. 2025. B. 1. C. 2. D. 2027.

Câu 11. Cho bốn số a, b, c, d theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết tổng ba số hạng đầu bằng $\frac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó a, b, c lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $T = a - b + c - d$.

- A. $T = \frac{101}{27}$. B. $T = \frac{100}{27}$. C. $T = -\frac{100}{27}$. D. $T = -\frac{101}{27}$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các giá trị của a để (u_n) tăng.

- A. $a > 0$. B. $0 < a < 1$. C. $a < 1$. D. $a > 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ với b, c, d là các số thực. Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $M(0;1)$ và có một điểm cực trị là $A(-2;0)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4b + c + d$.

- A. $\frac{41}{4}$. B. 23. C. 22. D. $\frac{37}{4}$.

Câu 14. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^n$ biết rằng số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^2 - n = 27$.

- A. 84. B. 2268. C. 61236. D. 27.

Câu 15. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 50 sản phẩm mỗi ngày. Biết rằng chi phí để sản xuất x sản phẩm mỗi ngày là $C(x) = x^3 - 25x^2 + 200x + 500$ (nghìn đồng). Qua khảo sát thị trường, doanh nghiệp nhận thấy nếu bán ra x sản phẩm mỗi ngày thì đơn giá của mỗi sản phẩm sẽ là $p(x) = 2000 - 10x$ (nghìn đồng). Gọi x_0 là số sản phẩm doanh nghiệp cần sản xuất để lợi nhuận thu được là lớn nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $x_0 \in (28; 35)$. B. $x_0 \in (15; 25)$. C. $x_0 \in (35; 45)$. D. $x_0 \in (20; 28]$.

PHẦN II. TỰ LUẬN (14 điểm).

Câu 16. (3 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số

$y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$ (C_m) có hai điểm cực trị và khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m) là lớn nhất.

Câu 17. (2 điểm) Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ có tọa độ là các số nguyên thỏa mãn $0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4$. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm thuộc S . Tính xác suất để ba điểm được chọn là ba đỉnh một tam giác.

Câu 18. (3 điểm) Trong một đợt diễn tập cứu hộ khẩn cấp, một đội kiểm lâm cần lập phương án di chuyển nhanh nhất từ trạm gác A đến vị trí tập kết B . Khu vực địa hình được mô hình hóa là một dải đất hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước chiều dài $AB = 120\text{km}$ và chiều rộng $AD = 25\text{km}$. Vận tốc di chuyển của xe địa hình phụ thuộc vào từng khu vực: nếu đi dọc theo cạnh AB thì vận tốc tối đa chỉ đạt 20 km/h, đi dọc theo tuyến đường tránh trên cạnh CD là 60 km/h, còn nếu đi xuyên qua vùng đồng cỏ bên trong khu đất thì vận tốc trung bình đạt 30 km/h. Hãy thiết lập một lộ trình di chuyển từ A đến B sao cho tổng thời gian đi đường là ít nhất và tính thời gian tối thiểu đó.

Câu 19. (3,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của AB , biết rằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHD) bằng $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

a) Tính thể tích của khối chóp $S.HBCD$.

b) Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SC và HD .

Câu 20. (2,5 điểm) Cho phương trình $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m - 7 - \ln(m+2-x) = 0$ (m là tham số) và phương trình $x^2 + 3x - 7 - \ln(x+2) = 0$. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của hai phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $S \in (-20; 20)$.

----- HẾT -----

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO
Được thực hiện bởi [AI](#) & [TOANMATH.com](#)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Chọn D.

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 2. Chọn C.

Ta có $y' = (2x+2)f'(x^2+2x)$. Với $x \in (-2; -1)$ thì $2x+2 < 0$ và $t = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \in (-1; 0)$, theo bảng xét dấu $f'(t) > 0$, nên $y' < 0$. Vậy hàm số nghịch biến trên $(-2; -1)$.

Câu 3. Chọn B.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm AC , ta có $B'G \perp (ABC)$. Vì $BB' \parallel CC'$ nên $\widehat{B'BG} = 60^\circ$.

$$\text{Suy ra } B'G = BB' \sin 60^\circ = 2\sqrt{13}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{39}a, \quad BG = BB' \cos 60^\circ = \sqrt{13}a, \quad BM = \frac{3}{2}BG = \frac{3\sqrt{13}a}{2}.$$

Đặt $AC = x$, tam giác ABC vuông tại C có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ nên $BC = x\sqrt{3}$. Khi đó

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 = 3x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{13x^2}{4} \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{13}x}{2}.$$

$$\text{Suy ra } x = 3a, \quad AC = 3a, \quad BC = 3\sqrt{3}a, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3\sqrt{3}a = \frac{9\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Vì $A'B' \parallel AB$ nên $A'B' \parallel (ABC)$, do đó $d(A', (ABC)) = d(B', (ABC)) = B'G$.

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} B'G \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{39}a \cdot \frac{9\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{9\sqrt{13}a^3}{2}.$$

Câu 4. Chọn A.

$$\text{Ta có } \frac{x^2 + 3x + 1}{x+1} = x + 2 - \frac{1}{x+1} \text{ nên } \frac{x^2 + 3x + 1}{x+1} + ax + b = (1+a)x + 2 + b - \frac{1}{x+1}.$$

Giới hạn bằng 1 khi $1+a=0$ và $2+b=1$, tức $a=-1$, $b=-1$. Vậy $T = a+b = -2$.

Câu 5. Chọn C.

$$\text{Máy bay chuyển động thẳng đều nên } \overrightarrow{AB} = \frac{45}{45+30} \overrightarrow{AC} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}.$$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2640; 1961; 213)$ nên $\overrightarrow{AB} = (1584; 1176,6; 127,8)$, suy ra $B(2144; 1349,6; 148,8)$.

Vậy $S = a + 5b - 5c = 2144 + 6748 - 744 = 8148$.

Câu 6. Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Suy ra $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

Câu 7. Chọn A.

Gọi $M(x; y; z)$. Điều kiện bài toán tương đương $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, tức là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 2x = 0.$$

Trừ từng cặp phương trình ta được $x = y = z$, thay vào được $3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{4}{3}$.

Vì M không trùng O nên $M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Vậy $x_M + y_M + z_M = 4$.

Câu 8. Chọn A.

Cỡ mẫu $n = 20$, $\frac{n}{4} = 5$. Tần số tích lũy của hai nhóm đầu là 2 và 9 nên Q_1 thuộc nhóm $[7; 9)$.

$$Q_1 = 7 + \frac{5-2}{7} \cdot 2 = \frac{55}{7} \approx 7,86.$$

Câu 9. Chọn A.

Ta có $y = 3 + \frac{1}{x-2}$. Điểm có tọa độ nguyên khi $x-2 \in \{-1; 1\}$, tức là các điểm $(1; 2)$ và $(3; 4)$.

$y' = -\frac{1}{(x-2)^2}$ nên $y'(1) = y'(3) = -1$. Vậy hệ số góc bằng -1 .

Câu 10. Chọn C.

Ta có $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ nên

$$S = \log_5 \left(\frac{1 \cdot 2 \cdots 2025}{2 \cdot 3 \cdots 2026} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdots 2027}{2 \cdot 3 \cdots 2026} \right) = \log_5 \left(\frac{1}{2026} \cdot \frac{2027}{2} \right) = \log_5 \frac{2027}{4052}.$$

Vì $4052 = 2 \cdot 2026$, mà 2027 lẻ và 2027, 2026 là hai số nguyên liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau, do đó $\frac{2027}{4052}$ là phân số tối giản. Suy ra $a = 2027$, $b = 4052$. Vậy $2a - b = 2$.

Câu 11. Chọn C.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, e là công sai của cấp số cộng. Ta có $b = aq = a + 3e$,
 $c = aq^2 = a + 7e$, suy ra $a(q-1) = 3e$ và $a(q^2-1) = 7e$.

Nếu $e = 0$ thì $a = 0$ (khi đó tổng ba số hạng đầu bằng 0, vô lí) hoặc $q = 1$ (trái giả thiết). Do đó
 $e \neq 0$, chia hai đẳng thức được $q+1 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow q = \frac{4}{3}$.

$$a+b+c = a\left(1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\right) = \frac{37a}{9} = \frac{148}{9} \Rightarrow a = 4.$$

$$\text{Vậy } T = a - b + c - d = a(1-q)(1+q^2) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{25}{9} = -\frac{100}{27}.$$

Câu 12. Chọn D.

Ta có $u_{n+2} - u_{n+1} = (a-1)(u_{n+1} - u_n)$. Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ thì (v_n) là cấp số nhân có $v_1 = 1$, công bội
 $a-1$, nên $v_n = (a-1)^{n-1}$.

(u_n) tăng $\Leftrightarrow v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$ (nếu $a = 1$ thì $v_2 = 0$; nếu $a < 1$ thì $v_2 < 0$).

Câu 13. Chọn B.

Đồ thị qua $M(0;1)$ nên $d = 1$. Ta có $y' = 3x^2 + 2bx + c$.

$A(-2;0)$ là điểm cực trị nên $y'(-2) = 0$ và $y(-2) = 0$, tức là $12 - 4b + c = 0$ và $-8 + 4b - 2c + 1 = 0$.

Giải hệ được $b = \frac{17}{4}$, $c = 5$. Thử lại $y''(-2) = -12 + 2b = -\frac{7}{2} \neq 0$ nên $x = -2$ đúng là điểm cực trị.

$$\text{Vậy } T = 4b + c + d = 17 + 5 + 1 = 23.$$

Câu 14. Chọn B.

$$C_n^2 - n = 27 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 27 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 54 = 0 \Leftrightarrow n = 9 \text{ (vì } n \text{ nguyên dương)}.$$

Số hạng tổng quát $C_9^k x^{9-k} \left(\frac{3}{x^2}\right)^k = C_9^k 3^k x^{9-3k}$. Số hạng không chứa x ứng với $k = 3$:

$$C_9^3 \cdot 3^3 = 84 \cdot 27 = 2268.$$

Câu 15. Chọn A.

Lợi nhuận $L(x) = x \cdot p(x) - C(x) = -x^3 + 15x^2 + 1800x - 500$ với $0 \leq x \leq 50$.

$L'(x) = -3x^2 + 30x + 1800 = -3(x-30)(x+20)$, $L'(x) > 0$ trên $[0;30)$ và $L'(x) < 0$ trên $(30;50]$.

Do đó $L(x)$ lớn nhất tại $x_0 = 30 \in (28;35)$.

PHẦN II. TỰ LUẬN.

Câu 16.

Ta có $y' = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1$. Đồ thị có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $m \neq 0$ và $\Delta' = 9m^2 - 3m(2m + 1) = 3m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 1$.

Thực hiện phép chia y cho y' ta được $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \frac{2-2m}{3}x + \frac{10-m}{3}$.

Tại hai điểm cực trị $y' = 0$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $\Delta: y = \frac{2-2m}{3}x + \frac{10-m}{3}$, hay $(2-2m)x - 3y + 10 - m = 0$.

Viết lại $\Delta: 2x - 3y + 10 - m(2x + 1) = 0$. Hệ $\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$ cho $x = -\frac{1}{2}$, $y = 3$, nên Δ luôn đi qua điểm cố định $K\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

Do đó $d(I, \Delta) \leq IK = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $\Delta \perp IK$.

$\overrightarrow{IK} = (-1; -1)$, vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (2-2m; -3)$. $\Delta \perp IK \Leftrightarrow \vec{n}$ cùng phương

$\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow 2-2m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn $m > 1$).

Vậy $m = \frac{5}{2}$.

Câu 17.

Tập S có $5 \cdot 5 = 25$ điểm. Số cách chọn 3 điểm là $n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$.

Đếm số bộ 3 điểm thẳng hàng:

Trên 5 hàng ngang: $5C_5^3 = 50$. Trên 5 cột dọc: $5C_5^3 = 50$.

Trên các đường song song với đường chéo (hệ số góc 1 và -1): mỗi hướng có các đường chứa 5, 4, 4, 3, 3 điểm nên có $2(C_5^3 + 2C_4^3 + 2C_3^3) = 2(10 + 8 + 2) = 40$.

Trên các đường có hệ số góc 2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$: mỗi loại có đúng 3 đường chứa 3 điểm (ví dụ $(0; 0), (1; 2), (2; 4)$), nên có $4 \cdot 3 = 12$.

Các hướng khác không có đường nào chứa 3 điểm của S .

Số bộ 3 điểm thẳng hàng là $50 + 50 + 40 + 12 = 152$, số tam giác là $2300 - 152 = 2148$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{2148}{2300} = \frac{537}{575}$.

Câu 18.

Trên cạnh AB vận tốc tối đa là 20 km/h, trong đồng cỏ là 30 km/h, trên đường CD là 60 km/h.

Trường hợp 1: Lộ trình không đi trên đường CD . Khi đó vận tốc không quá 30 km/h và quãng đường không ngắn hơn $AB = 120$ km, nên thời gian không ít hơn $\frac{120}{30} = 4$ giờ (riêng đi dọc cạnh

AB mất $\frac{120}{20} = 6$ giờ).

Trường hợp 2: Lộ trình có đi trên đường CD . Gọi M , N lần lượt là điểm đầu tiên và điểm cuối cùng của lộ trình thuộc CD .

Đoạn từ A đến M có vận tốc không quá 30 km/h và độ dài không nhỏ hơn AM nên mất ít nhất $\frac{AM}{30}$ giờ, đạt được khi đi thẳng từ A đến M qua đồng cỏ. Tương tự, đoạn từ N đến B mất ít nhất $\frac{NB}{30}$ giờ.

Đoạn từ M đến N có vận tốc không quá 60 km/h và độ dài không nhỏ hơn MN nên mất ít nhất $\frac{MN}{60}$ giờ, đạt được khi đi theo đường CD .

Đặt $DM = x$, $CN = y$ với $x, y \in [0; 120]$.

Nếu $x + y > 120$ (đi ngược chiều trên CD) thì thời gian lớn hơn $\frac{\sqrt{x^2 + 625} + \sqrt{y^2 + 625}}{30} > \frac{x + y}{30} > 4$ giờ.

Nếu $x + y \leq 120$ thì thời gian không ít hơn

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + 625} + \sqrt{y^2 + 625}}{30} + \frac{120 - x - y}{60} = 2 + g(x) + g(y), \text{ với } g(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 625}}{30} - \frac{t}{60}, t \in [0; 120].$$

$$g'(t) = \frac{t}{30\sqrt{t^2 + 625}} - \frac{1}{60}, g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t = \sqrt{t^2 + 625} \Leftrightarrow t = \frac{25\sqrt{3}}{3}. g'(t) \text{ đổi dấu từ âm sang dương}$$

$$\text{tại đó nên } \min g(t) = g\left(\frac{25\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{9} - \frac{5\sqrt{3}}{36} = \frac{5\sqrt{3}}{12}.$$

Suy ra $T \geq 2 + \frac{5\sqrt{3}}{6} \approx 3,44$ giờ, dấu bằng khi $x = y = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn $x + y \leq 120$).

Vì $2 + \frac{5\sqrt{3}}{6} < 4$ nên thời gian tối thiểu là $2 + \frac{5\sqrt{3}}{6} \approx 3,44$ giờ (khoảng 3 giờ 27 phút).

Lộ trình: từ A đi thẳng qua đồng cỏ đến điểm M trên CD với $DM = \frac{25\sqrt{3}}{3} \approx 14,43$ km (tức $\widehat{DAM} = 30^\circ$), đi theo đường CD đến điểm N với $CN = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ km, rồi đi thẳng qua đồng cỏ về B (tức $\widehat{CBN} = 30^\circ$).

Câu 19.

Vì tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ và H là trung điểm AB nên

$$SH \perp (ABCD), SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $(SHD) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến HD , do đó $d(C, (SHD)) = d(C, HD)$.

Đặt $AD = x$. Ta có $S_{ABCD} = \frac{(x+2a) \cdot 2a}{2} = a(x+2a)$, $S_{AHD} = \frac{ax}{2}$, $S_{BHC} = a^2$, nên

$$S_{HCD} = a(x+2a) - \frac{ax}{2} - a^2 = \frac{a(x+2a)}{2}.$$

$$d(C, HD) = \frac{2S_{HCD}}{HD} = \frac{a(x+2a)}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 2(x+2a)^2 = 5(x^2+a^2) \Leftrightarrow 3x^2 - 8ax - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3a$$

(vì $x > 0$).

a) $S_{HBCD} = S_{ABCD} - S_{AHD} = 5a^2 - \frac{3a^2}{2} = \frac{7a^2}{2}.$

$$V_{S.HBCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{HBCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{7a^2}{2} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{6}.$$

b) Ta có $HC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$, $HD^2 = a^2 + 9a^2 = 10a^2$, $CD^2 = (3a-2a)^2 + (2a)^2 = 5a^2$,
 $SC^2 = SH^2 + HC^2 = 8a^2.$

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{HD} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HD} = \frac{HC^2 + HD^2 - CD^2}{2} = 5a^2 \text{ (vì } SH \perp HD \text{)}.$$

$$\cos(SC, HD) = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{HD}|}{SC \cdot HD} = \frac{5a^2}{2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{10}a} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Câu 20.

Xét phương trình $x^2 + 3x - 7 - \ln(x+2) = 0$ (2). Đặt $g(t) = t^2 + 3t - 7 - \ln(t+2)$ với $t > -2$.

$$g'(t) = 2t + 3 - \frac{1}{t+2} = \frac{(2t+5)(t+1)}{t+2}, \text{ nên } g \text{ nghịch biến trên } (-2; -1] \text{ và đồng biến trên } [-1; +\infty).$$

$g(-1) = -9 < 0$, $\lim_{t \rightarrow -2^+} g(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$, nên (2) có đúng hai nghiệm $t_1 \in (-2; -1)$, $t_2 \in (-1; +\infty)$.

Hơn nữa $g(-1,9) = -9,09 + \ln 10 < 0$, $g(1,5) = -0,25 - \ln 3,5 < 0$, $g(1,9) = 2,31 - \ln 3,9 > 0$ (vì $3,9 < e^2$), nên $t_1 \in (-2; -1,9)$, $t_2 \in (1,5; 1,9)$.

Với phương trình $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m - 7 - \ln(m+2-x) = 0$ (1), đặt $t = m - x$ thì $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m - 7 = (m-x)^2 + 3(m-x) - 7$ nên (1) trở thành $t^2 + 3t - 7 - \ln(t+2) = 0$.

Do đó (1) có đúng hai nghiệm $x = m - t_1$ và $x = m - t_2$.

Nghiệm của (1) trùng với nghiệm của (2) khi $m \in \{2t_1; 2t_2; t_1 + t_2\}$. Ta có $2t_1 \in (-4; -3,8)$, $2t_2 \in (3; 3,8)$, $t_1 + t_2 \in (-0,5; 0)$, đều không chứa số nguyên. Vậy với m nguyên, hai phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Khi đó $S = t_1 + t_2 + (m - t_1) + (m - t_2) = 2m$.

$S \in (-20; 20) \Leftrightarrow -10 < m < 10$. Vậy $m \in \{-9; -8; \dots; 8; 9\}$, có 19 giá trị nguyên của m .

----- HẾT -----

Lưu ý:

- + Đề thi được gõ lại từ ảnh chụp, không phải bản chính thức từ đơn vị ra đề.
- + Lời giải chi tiết do AI thực hiện, chỉ mang tính chất tham khảo, không thay thế đáp án chính thức.

[TOANMATH.com](https://toanmath.com)