



Zalo 0889 971 004

Thầy Tài GenZ

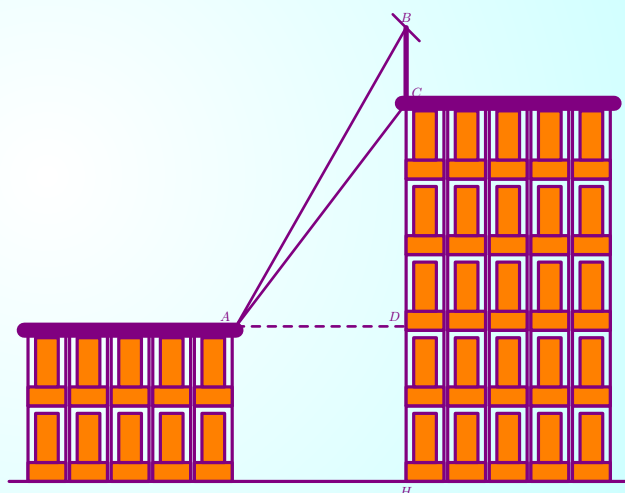
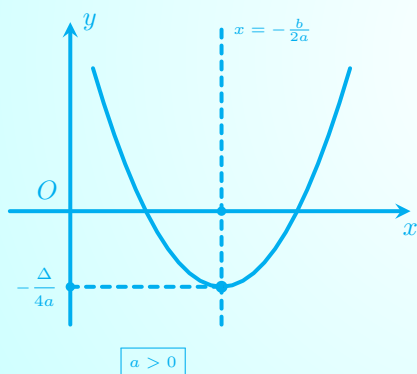
NGÔ ĐỨC TÀI

TOÁN

10

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

TẬP MỘT



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

CHỦ
ĐỀ 1

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

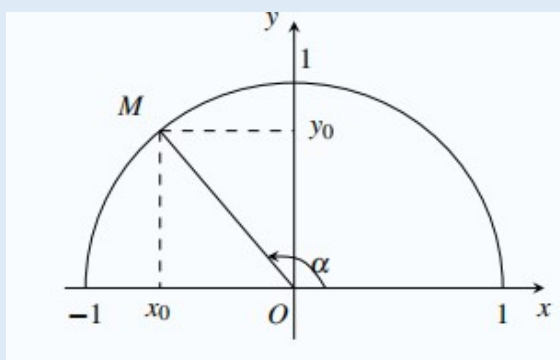
Trong chủ đề này, chúng ta cần:

- Nhận biết và tính được các giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .
- Giải thích được hệ thức liên hệ giữa giá trị lượng giác của góc phụ nhau, bù nhau.

LÝ THUYẾT CẦN GHI NHỚ

1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

⊕ Với mỗi góc α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm M , ta có:



- Tung độ y_0 của M gọi là **sin** của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha = y_0$;
- Hoành độ x_0 của M gọi là **cos** của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha = x_0$;
- Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$) là **tang** của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
- Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) là **côtang** của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

⊕ Các số $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α .

🔗 **VÍ DỤ 1.** Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° .

🔗 **LỜI GIẢI.**

Trên nửa đường tròn đơn vị, xác định điểm M sao cho $\widehat{xOM} = 120^\circ$.

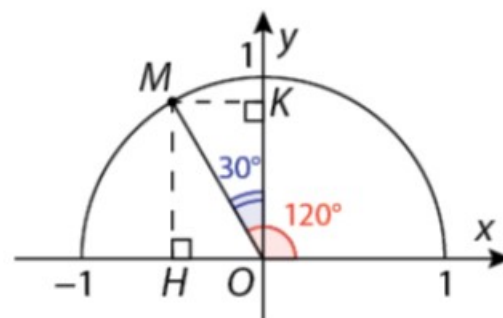
Suy ra $\widehat{yOM} = 30^\circ$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox và trục Oy (Hình vẽ).

Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông OKM, ta có:

$$MK = OM \cdot \sin \widehat{MOK} = 1 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$OK = OM \cdot \cos \widehat{MOK} = 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Vì $\widehat{xOM} = 120^\circ > 90^\circ$ nên H nằm bên trái trục Oy.

Từ đó suy ra tọa độ điểm M là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. Suy ra:

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}; \cot \alpha = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Luyện tập

Tính các giá trị lượng giác của góc 135° .

CHÚ Ý

- Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương. Nếu α là góc tù thì $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.
- $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$. $\cot \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

2. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

a) Hai góc phụ nhau

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha;$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

b) Hai góc bù nhau

Với mọi góc α thỏa mãn $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta luôn có:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT SỐ GÓC ĐẶC BIỆT

Giá trị lượng giác \ α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

⚠ CHÚ Ý: Trong bảng, kí hiệu “||” để chỉ giá trị lượng giác không xác định.



MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. Xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt

💡 PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ❓ Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- ❓ Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- ❓ Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản sau:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1;$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \sin 45^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 120^\circ + \cos 135^\circ$

b) $B = \tan 45^\circ \cdot \cot 135^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 120^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$

c) $C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$

d) $D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12 \sin^2 107^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$

e) $E = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 148^\circ + \frac{5 \cot^2 108^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$

LỜI GIẢI.

Đáp số:

a) $A = 0$.

b) $B = 0$.

c) Do $5^\circ = 90^\circ - 85^\circ, 25^\circ = 90^\circ - 65^\circ$ nên $\cos 5^\circ = \sin 85^\circ, \cos 25^\circ = \sin 65^\circ$.

$$C = (\sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ) + (\sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

d) Do $73^\circ + 107^\circ = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có:

$$\frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} + 12 \sin^2 107^\circ = 12(\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) = 12. \quad (1)$$

$$\tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ = \tan 75^\circ \cdot (-\cot 75^\circ) = -1. \quad (2)$$

Do $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có:

$$\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ = \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $D = 12 - 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$

e) Do $148^\circ + 32^\circ = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$ và $72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$ nên

$$E = 4 \tan 32^\circ \cdot (-\cot 32^\circ) \cdot \cos 60^\circ + 5(-\cot 72^\circ)^2 \cdot \cos^2 18^\circ + 5 \cos^2 18^\circ$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 = 3.$$

VÍ DỤ 2. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

c) $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$

LỜI GIẢI.

a) $A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$

b) $B = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$

c) $C = \sin^2 45^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 (\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ) + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 2 (\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

VÍ DỤ 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c) $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

LỜI GIẢI.

a) $A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$
 $= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)$
 $= 1 + 1 = 2$

b) $B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$
 $= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ)$
 $= 0$

c) $C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ) (\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$
 $= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ) (\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ)$
 $= 1$

VÍ DỤ 4. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = \sin 45^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 120^\circ + \cos 135^\circ$

b) $B = \tan 45^\circ \cdot \cot 135^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 120^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$

c) $C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$

d) $D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12 \sin^2 107^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$

e) $E = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 148^\circ + \frac{5 \cot^2 108^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$

LỜI GIẢI.

Đáp số:

a) $A = 0$.

b) $B = 0$.

c) Do $5^\circ = 90^\circ - 85^\circ, 25^\circ = 90^\circ - 65^\circ$, nên ta có $\cos 5^\circ = \sin 85^\circ, \cos 25^\circ = \sin 65^\circ$.

Suy ra

$$C = (\sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ) + (\sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

d) Do $73^\circ + 107^\circ = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có:

$$\frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} + 12 \sin^2 107^\circ = 12(\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) = 12. \quad (1)$$

$$\tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ = \tan 75^\circ \cdot (-\cot 75^\circ) = -1. \quad (2)$$

Do $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có

$$\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ = \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $D = 12 - 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$

e) Do $148^\circ + 32^\circ = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$ và $72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$ nên

$$E = 4 \tan 32^\circ \cdot (-\cot 32^\circ) \cdot \cos 60^\circ + 5(-\cot 72^\circ)^2 \cdot \cos^2 18^\circ + 5 \cos^2 18^\circ$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 = 3.$$

DẠNG 2. Chứng minh đẳng thức

🔗 PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng hệ thức cơ bản và quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, phụ nhau để chứng minh.

🔗 **VÍ DỤ 1.** Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Chứng minh:

- a) $\sin A = \sin(B + C)$;
- b) $\cos A + \cos(B + C) = 0$;
- c) $\tan A + \tan(B + C) = 0 \left(A \neq 90^\circ \right)$;
- d) $\cot A + \cot(B + C) = 0$.

🔗 LỜI GIẢI.

Ta có: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + C = 180^\circ - A$. Do đó:

- a) $\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$.
- b) $\cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A \Rightarrow \cos A + \cos(B + C) = 0$.
- c) $\tan(B + C) = \tan(180^\circ - A) = -\tan A \Rightarrow \tan A + \tan(B + C) = 0$.
- d) $\cot(B + C) = \cot(180^\circ - A) = -\cot A \Rightarrow \cot A + \cot(B + C) = 0$.

🔗 **VÍ DỤ 2.** Chứng minh rằng với mọi góc $x \left(0^\circ \leq x \leq 90^\circ \right)$, ta đều có:

- a) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;
- b) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;
- c) $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \left(x \neq 90^\circ \right)$
- d) $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \left(x \neq 0^\circ \right)$.

🔗 LỜI GIẢI.

- a) Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;
- b) Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;
- c) Ta có: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \left(x \neq 90^\circ \right)$;
- d) Ta có: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \left(x \neq 0^\circ \right)$.

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng:

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;

c) $\sqrt{\sin^4 \alpha + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = 4$.

LỜI GIẢI.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^2 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

b) Tương tự câu a). Sử dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ và hệ thức cơ bản.

c) Sử dụng hệ thức cơ bản $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ta được

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sin^4 \alpha + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)^2 + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{4 + 4 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} + \sqrt{1 + 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = (2 + \cos^2 \alpha) + (1 + \sin^2 \alpha) = 4. \end{aligned}$$

DẠNG 3. Tính giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ☐ Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- ☐ Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- ☐ Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

VÍ DỤ 1.

a) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

LỜI GIẢI. a) Ta có $A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$

Suy ra $A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$

$$b) B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{3 + 8\sqrt{2}}$$

❗ VÍ DỤ 2. a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$

b) Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$

c) Cho $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$. Tính giá trị lượng giác còn lại.

✍ LỜI GIẢI.

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Vì $\tan \gamma = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$ mặt khác $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ nên

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8 + 1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

VÍ DỤ 3. Cho góc α thoả mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

LỜI GIẢI.

Do $\tan \alpha = \sqrt{2} > 0$ nên α là góc nhọn và $\cos \alpha > 0$. Chia cả tử và mẫu của K cho $\cos^3 \alpha \neq 0$, ta được

$$K = \frac{\tan^3 \alpha + \tan \alpha + 2 \tan^2 \alpha - 4}{\tan \alpha \cdot (1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 4 - 4}{\sqrt{2} \cdot 3 - 3} = \frac{3\sqrt{2}}{3(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1).$$

DẠNG 4. Toán thực tế

VÍ DỤ 1. Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \leq N \leq 172$, $m = 1$ nếu $173 \leq N \leq 355$, $m = 2$ nếu $356 \leq N \leq 365$.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20^\circ$.

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

Chú ý. Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$.

Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn, vào mùa hè, góc nghiêng lớn nên nhiệt độ cao.

LỜI GIẢI.

a) Ngày 10 / 10 là ngày thứ 283 của năm không nhuận. Do đó, góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày này tại vĩ độ $\phi = 20^\circ$ bằng

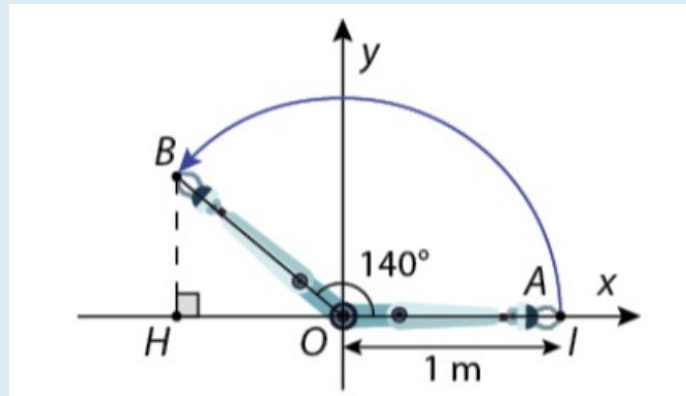
$$\begin{aligned}\alpha &= 90^\circ - 20^\circ - \left| \cos \left(\left(\frac{2(283 + 10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ \\ &= 70^\circ - \left| \cos \frac{221}{365} \cdot 180^\circ \right| \cdot 23,5^\circ \approx 62,35^\circ\end{aligned}$$

b) Chú ý. Vĩ độ của nơi có góc nghiêng Mặt Trời α vào ngày thứ N trong năm bằng $\phi = 90^\circ - \alpha - \left| \cos \left(\frac{2(N + 10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right| \cdot 23,5^\circ$

VÍ DỤ 2. Một cánh tay robot dài 1 m gấp vật từ vị trí A, sau đó quay một góc 140° quanh O đến vị trí B rồi thả vật rơi tự do chạm đất (hình vẽ).

a) Hỏi khi vật rơi chạm đất, vật cách vị trí A bao nhiêu mét?

b) Nếu muốn vật rơi chạm đất cách vị trí A một khoảng 1,5 m thì cánh tay robot cần quay một góc bao nhiêu độ?



LỜI GIẢI.

a) Ta có $\widehat{HOB} = 40^\circ$, suy ra $OH = |\cos 140^\circ| \cong 0,77$ mét.

Suy ra $AH = OA + OH = 1 + 0,77 = 1,77$ mét.

Do đó vật rơi cách vị trí A khoảng 1,77 mét.

b) Theo đề bài, $AH = OA + OH = 1,5 \Rightarrow OH = 1,5 - 1 = 0,5$.

Tức là $\cos \alpha = 0,5 = \frac{1}{2}$ do đó $\alpha = 60^\circ$.



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

Câu 1: Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

Do đó, $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 2: Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

Do đó, $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha = \cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0$.

Câu 3: Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn C

Lấy góc $\alpha = 120^\circ$ sau đó thử ngược

Câu 4: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây là *sai*?

- A. $\cos \alpha < \cos \beta$. B. $\sin \alpha < \sin \beta$.
C. $\cot \alpha > \cot \beta$. D. $\tan \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải

Chọn A

Lấy $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$ sau đó thử ngược.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$.

B. $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$.

C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$.

D. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng từ 0° đến 90° , khi giá trị của góc tăng thì giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$.

B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$.

C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$.

D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị $\sin$ tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$.

B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$.

C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$.

D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị $\sin$ tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Câu 8: Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$?

A. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

B. $\cos^2 \frac{\alpha}{3} + \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$.

C. $\cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$.

D. $5 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} \right) = 5$.

Lời giải

Chọn D

Từ biểu thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ta suy ra $\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} = 1$.

Do đó ta có $5 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} \right) = 5$.

Câu 9: Cho biết $\sin \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{105}{25}$. B. $P = \frac{107}{25}$. C. $P = \frac{109}{25}$. D. $P = \frac{111}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2 \frac{\alpha}{3} + \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{16}{25}$.

Do đó ta có $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 3 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 5 \cdot \frac{16}{25} = \frac{107}{25}$.

Câu 10: Cho biết $\tan \alpha = -3$. Giá trị của $P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{4}{3}$. B. $P = \frac{5}{3}$. C. $P = -\frac{4}{3}$. D. $P = -\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha} = \frac{6 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 7}{6 + 7 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{6 \tan \alpha - 7}{6 + 7 \tan \alpha} = \frac{5}{3}$.

Câu 11: Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = -\frac{19}{13}$. B. $P = \frac{19}{13}$. C. $P = \frac{25}{13}$. D. $P = -\frac{25}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$.

Ta có $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\left(-\frac{2}{3} \right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{9}}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{19}{13}$.

Câu 12: Cho biết $\cot \alpha = 5$. Giá trị của $P = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{10}{26}$. B. $P = \frac{100}{26}$. C. $P = \frac{50}{26}$. D. $P = \frac{101}{26}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1 = \sin^2 \alpha \left(2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1 + \cot^2 \alpha) = \frac{3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{101}{26}. \end{aligned}$$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 1.** Xét tính đúng, sai của các đẳng thức sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$		
(b)	$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$		
(c)	$\cos 40^\circ = \cos 140^\circ$		
(d)	$\tan 25^\circ = \tan 155^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng		c) Sai	d) Sai
---------	---------	--	--------	--------

a) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

b) $\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$;

c) $\cos 40^\circ = \cos (180^\circ - 140^\circ) = -\cos 140^\circ$;

d) $\tan 25^\circ = \tan (180^\circ - 155^\circ) = -\tan 155^\circ$.

» **Câu 2.** Xét tính đúng, sai của các đẳng thức sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\tan 135^\circ = -1$		
(b)	$\cot 120^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$		
(c)	$\sin 90^\circ = -1$		
(d)	$5 \tan 135^\circ + \sqrt{3} \cot 120^\circ - \sin 90^\circ = 7$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

» Câu 3. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha > 0$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$		
(c)	$\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$		
(d)	$\cot \alpha = 2\sqrt{2}$		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$.

b) Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) Do đó: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

» Câu 4. Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha > 0$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$		
(c)	$\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$		
(d)	$\cot \alpha = 2\sqrt{2}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Vì $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ nên $\sin \alpha > 0$.

b) Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ mà $\sin \alpha > 0$, nên $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

$$c) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$d) \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

» Câu 5. Cho biết $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot \alpha = -\frac{4}{3}$		
(b)	$\cos \alpha > 0$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$		
(d)	$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Vì $\tan \alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{4}{3}$.

b) Theo giả thiết: $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$.

c) Ta có: $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$;

d) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

» Câu 6. Cho $\cot \alpha = -\sqrt{2}$, ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin \alpha > 0$		
(b)	$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$		
(c)	$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$		
(d)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Do $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$

b) $\cot \alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

c) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Nhưng do $\sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) Mà $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

» Câu 7. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$		
(b)	$\cos \alpha > 0$		
(c)	$\cos \alpha = \frac{4}{5}$		
(d)	$\tan \alpha = \frac{3}{4}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

b) Mà $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$.

c) Do đó $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$;

d) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$

» Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$		
(b)	$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$		
(c)	$\frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$		
(d)	$\frac{1}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{7}{25}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) $\sin^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

b) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

c) Ta có: $H = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$

d) Do đó: $H = \frac{1}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{16}{25} - \frac{9}{25}} = \frac{25}{7}$

» Câu 9. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$		
(b)	$A = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = \frac{35}{9}$		
(c)	$B = 5 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\frac{1}{3}$		
(d)	$C = \sqrt{\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha} + \sqrt{\cos^2 \alpha - 7 \sin^2 \alpha} = 2$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Ta có: $\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{9}$. Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

b) $A = \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{25}{9}$.

c) $B = 5 \cdot \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{1}{3}$

d) $C = \sqrt{\frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{8}{9}} + \sqrt{\frac{8}{9} - 7 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$.

» Câu 10. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$		
(b)	$A = 3 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{5}{8}$		
(c)	$B = 5 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$		
(d)	$C = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha} + \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{193}}{9}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) $\cos \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$. Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$.

b) $A = 3 \cdot \frac{7}{16} + \frac{9}{16} = \frac{15}{8}$.

c) $B = 5 \cdot \frac{7}{16} - 3 \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{2}$.

d) $C = \sqrt{\frac{7}{16} + \left(\frac{9}{16}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{7}{16}\right)^2 + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{193}}{8}$.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

Câu 1. Tính giá trị biểu thức $A = 3\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 3\cos 60^\circ + 10\cos 180^\circ$;

Trả lời: $-6,5$

Lời giải

$$A = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot (-1) = -\frac{13}{2} = -6,5$$

Câu 2. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{2\sin^2 30^\circ}{1 - 2\cos^2 30^\circ} + 4\sin 60^\circ - \cot 30^\circ$.

Trả lời: $-0,73$

Lời giải

$$B = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} \approx -0,73$$

Câu 3. Tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ.$$

Trả lời: $3,5$

Lời giải

$$A = (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

Câu 4. Tính giá trị biểu thức sau: $C = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$;

Trả lời: 2

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) \\ &= [\sin^2 51^\circ + \sin^2 (90^\circ - 51^\circ)] + [\sin^2 55^\circ + \sin^2 (90^\circ - 55^\circ)] \\ &= (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Câu 5. Tính giá trị của biểu thức: $B = \sin 90^\circ + \cos 60^\circ - 2\tan 135^\circ$

Trả lời: $3,5$

Lời giải

$$B = 1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot (-1) = \frac{7}{2}$$

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức: $C = \sqrt{3} \sin 60^\circ - \cos 120^\circ + \cot 135^\circ$

Trả lời: 1

Lời giải

$$C = \sqrt{3} \sin 60^\circ + \cos 60^\circ - \cot 45^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 1$$

Câu 7. Tính giá trị của biểu thức: $E = \sin^2 5^\circ + \sin^2 13^\circ + \sin^2 77^\circ + \sin^2 85^\circ$

Trả lời: 2

Lời giải

$$E = \sin^2 5^\circ + \sin^2 13^\circ + \sin^2 (90^\circ - 13^\circ) + \sin^2 (90^\circ - 5^\circ)$$

$$= \sin^2 5^\circ + \sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ + \cos^2 5^\circ$$

$$= (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ) = 1 + 1 = 2$$

Câu 8. Tính giá trị của biểu thức: $F = 1 - 2 \sin^2 55^\circ + 4 \cos^2 60^\circ - 2 \sin^2 35^\circ + \tan 55^\circ \tan 35^\circ$

Trả lời: 1

Lời giải

$$F = 1 - 2 \sin^2 (90^\circ - 35^\circ) + 4 \cos^2 60^\circ - 2 \sin^2 35^\circ + \tan (90^\circ - 35^\circ) \tan 35^\circ$$

$$F = 1 - 2 \cos^2 35^\circ + 4 \cos^2 60^\circ - 2 \sin^2 35^\circ + \cot 35^\circ \cdot \tan 55^\circ$$

$$= 1 - 2(\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) + 4 \cos^2 60^\circ + \tan 35^\circ \cot 35^\circ = 1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 1$$

Câu 9. Tính giá trị biểu thức $P = \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$.

Trả lời: 0

Lời giải

$$\text{Vì } 30^\circ \text{ và } 60^\circ \text{ là hai góc phụ nhau nên } \begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$P = \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

Câu 10. Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính giá trị biểu thức $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

Trả lời: $-\frac{9}{13}$

Lời giải

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$$

Do α là góc tù nên $\cos \alpha < 0$, từ đó $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

$$\text{Như vậy } 3\sin \alpha + 2\cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{9}{13}$$

Câu 11. Cho $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tính $\tan \alpha$.

Trả lời: $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

Lời giải

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{4}{25}} - 1 = \frac{21}{4}.$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2} \quad (\text{Do } 90^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

Câu 12. Cho các góc α, β thoả mãn $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3\sin^2 \alpha \sin^2 \beta$.

Trả lời: 1

Lời giải

Ta có: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$. Mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên

$$\begin{aligned} T &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1. \end{aligned}$$

Câu 13. Cho $\cot \alpha = -3$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Trả lời: $-0,7$

Lời giải

Vì $\cot \alpha = -3$ nên $\sin \alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của P cho $\sin^3 \alpha$, ta có:

$$P = \frac{1 + \cot^3 \alpha}{\frac{1}{\sin^2 \alpha} (1 - \cot \alpha)} = \frac{1 + \cot^3 \alpha}{(1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cot \alpha)} = \frac{1 + (-3)^3}{[1 + (-3)^2][1 - (-3)]} = -\frac{13}{20}$$

Câu 14. Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$?

Trả lời: 3,25

Lời giải

Ta có: $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) + 4\cos^2 x = 3 + \cos^2 x = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \approx 3,25$.

Câu 15. Cho $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3\sin \alpha + 4\cos \alpha}{2\sin \alpha - 5\cos \alpha}$?

Trả lời: -1,2

Lời giải

Vì $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3}$ nên $\cos \alpha \neq 0$.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos \alpha$, ta được:

$$A = \frac{3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 4}{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 5} = \frac{3 \tan \alpha + 4}{2 \tan \alpha - 5} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + 4}{2 \cdot \frac{1}{3} - 5} = -\frac{15}{13} \approx -1,2$$

Câu 16. Cho $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3\sin \alpha + 4\cos \alpha}{2\sin \alpha - 5\cos \alpha}$?

Trả lời: 13

Lời giải

Do $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$.

Chia hai vế biểu thức A cho $\sin \alpha$, ta có: $A = \frac{3 + 4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{2 - 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13$

Câu 17. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$?

Trả lời: 2,13

Lời giải

$$B = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan \alpha}}{\frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + 2 \cos^2 \alpha.$$

Suy ra: $B = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8} \approx 2,13.$

Câu 18. Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Tính giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$?

Trả lời: $\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 = \sin^2 a + 2 \sin a \cos a + \cos^2 a = 1 + 2 \sin a \cos a$
 $\Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}.$

Khi đó: $\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

Câu 19. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tìm m dương để $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$?

Trả lời: 3

Lời giải

Ta có: $7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3.$

Câu 20. Cho $\tan \alpha = 1$. Tính $B = \frac{\sin^2 \alpha + 1}{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$

Trả lời: 3

Lời giải

Vì $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha$ ta được :

$$B = \frac{(\sin^2 \alpha + 1) \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{(2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha + 1}{2 - \tan^2 \alpha} = 3$$

Câu 21. Cho $\cot \alpha = 2$. Tính $B = \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}.$

Trả lời: -3,6

Lời giải

Vì $\cot \alpha = 2 \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu cho $\sin^3 \alpha$ ta được :

$$B = \frac{(\sin \alpha + 2 \cos \alpha) \frac{1}{\sin^3 \alpha}}{(\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha) \frac{1}{\sin^3 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + 2 \cot \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{1 - \cot^3 \alpha}$$

$$= \frac{1 + \cot^2 \alpha + 2 \cot \alpha (1 + \cot^2 \alpha)}{1 - \cot^3 \alpha} = \frac{2 \cot^3 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \cot \alpha + 1}{1 - \cot^3 \alpha} = -\frac{25}{7} \approx -3,6$$

Câu 22. Cho $\cot \alpha = 4$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Trả lời: 5

Lời giải

$$\cot \alpha = 4 \Rightarrow \sin \alpha \neq 0. \text{ Khi đó ta có } P = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \cot \alpha = 1 + 4 = 5.$$

Câu 23. Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$.

Trả lời: 3,25

Lời giải

$$P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) + 4 \cos^2 x = 3 + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \approx 3,25.$$

Câu 24. Cho $\tan x = -1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x}$.

Trả lời: -1

Lời giải

$$P = \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 2}{1 + 2 \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 2}{1 + 2 \tan x} = \frac{-1 + 2}{1 + 2 \cdot (-1)} = -1.$$

Câu 25. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \sin \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha}{4 \sin \alpha + 3 \sqrt{2} \cos \alpha}$ biết $\cot \alpha = -\sqrt{2}$.

Trả lời: -2

Lời giải

Vì $\cot \alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của biểu thức P cho $\sin \alpha$ ta được:

$$P = \frac{\frac{2 \sin \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{4 \sin \alpha + 3\sqrt{2} \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 - \sqrt{2} \cot \alpha}{4 + 3\sqrt{2} \cot \alpha} = \frac{2 - \sqrt{2}(-\sqrt{2})}{4 + 3\sqrt{2}(-\sqrt{2})} = -2$$

Câu 26. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

Trả lời: 0,5

Lời giải

$$A = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{1} = \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 1 - 4 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Câu 27. Cho tam giác ABC . Hãy tính $\sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C)$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\begin{aligned} \sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C) &= \sin A \cdot \cos(180^\circ - A) + \cos A \cdot \sin(180^\circ - A) \\ &= -\sin A \cdot \cos A + \cos A \cdot \sin A = 0. \end{aligned}$$

Câu 28. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $P = |\sin x - \cos x|$.

Trả lời: 1,4

Lời giải

$$P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x, P \geq 0.$$

$$\frac{1}{5} = \sin x + \cos x \Rightarrow \frac{1}{25} = (\sin x + \cos x)^2 \Rightarrow \frac{1}{25} = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Do đó: } P^2 = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \Rightarrow P = \frac{7}{5} \text{ (Vì } P \geq 0 \text{)}.$$

Câu 29. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

Trả lời: -1

Lời giải

$\alpha + \beta = 180^\circ$. Hai góc α và β bù nhau nên $\sin \alpha = \sin \beta$; $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Do đó $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha = -\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -1$.

Câu 30. Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

Trả lời: 2

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ) \\ &= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Câu 31. Tính giá trị biểu thức sau: $B = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$;

Trả lời: 1

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ \\ &= (\tan 1^\circ \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ \\ &= (\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cot 2^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cot 44^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1 \cdot 1 \dots 1 = 1. \end{aligned}$$

Câu 32. Tính giá trị biểu thức sau: $D = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

Trả lời: -1

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= (\cos 1^\circ + \cos 179^\circ) + (\cos 2^\circ + \cos 178^\circ) + \\ &\dots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) + \cos 90^\circ + \cos 180^\circ \\ &= [\cos 1^\circ + \cos(180^\circ - 1^\circ)] + [\cos 2^\circ + \cos(180^\circ - 2^\circ)] + \dots + [\cos 89^\circ + \cos(180^\circ - 89^\circ)] + 0 - 1 \\ &= (\cos 1^\circ - \cos 1^\circ) + (\cos 2^\circ - \cos 2^\circ) + \dots + (\cos 89^\circ - \cos 89^\circ) - 1 \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Câu 33. Tính giá trị biểu thức $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ$.

Trả lời: 9

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= 2(\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ) + 1 \\
 &= 2\left[(\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)\right] + 1 \\
 &= 2\left[(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)\right] + 1 \\
 &= 2.4 + 1 = 9
 \end{aligned}$$

Câu 34. Tính giá trị các biểu thức sau: $B = \cos 0^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

Trả lời: 0

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) \\
 &= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0
 \end{aligned}$$

CHỦ
ĐỀ 2

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Trong chủ đề này, chúng ta cần:

📖 Hiểu các hệ thức cơ bản trong tam giác: định lý sin, định lý cosin, công thức diện tích tam giác.

📖 Mô tả được các giải tam giác và vận dụng vào giải quyết vấn đề thực tiễn.

LÝ THUYẾT CẦN GHI NHỚ

1. ĐỊNH LÝ CÔSIN TRONG TAM GIÁC



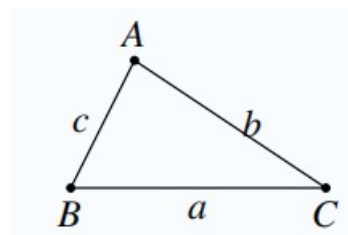
Định lý cosin

Trong tam giác ABC với
 $BC = a, AC = b, AB = c$, ta có;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Hệ quả

Từ định lý cosin ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. ĐỊNH LÝ SIN TRONG TAM GIÁC



Định lý sin

Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$, ta có;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Hệ quả

Từ định lý sin ta có:

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C.$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R};$$

3. GIẢI TAM GIÁC

Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

Chú ý. Áp dụng các Định lý cosin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

- ⊙ Biết hai cạnh và góc xen giữa;
- ⊙ Biết ba cạnh;
- ⊙ Biết một cạnh và hai góc kề.

4. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Ta đã biết tính diện tích tam giác theo chiều cao và độ dài cạnh đáy tương ứng. Liệu còn công thức nào khác để tính diện tích tam giác hay không?

Công thức tính diện tích tam giác ABC :

$$S = pr = \frac{(a+b+c)r}{2}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP



Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định các yếu tố trong tam giác



Phương pháp

- Sử dụng định lý cosin và định lý sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có $a = 6, b = 5, c = 8$. Tính $\cos A, S, r$.

LỜI GIẢI.

Từ định lý cosin ta suy ra $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{53}{80}$

Tam giác ABC có nửa chu vi là: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+5+8}{2} = 9,5$.

Theo công thức Herong ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9,5 \cdot (9,5-6) \cdot (9,5-5) \cdot (9,5-8)} \approx 14,98$$

Lại có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14,98}{9,5} = 1,577$.

Vậy $\cos A = \frac{53}{80}; S \approx 14,98$ và $r = 1,577$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC có $a = 10, \hat{A} = 45^\circ, \hat{B} = 70^\circ$. Tính R, b, c .

LỜI GIẢI.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A}; \quad b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$$

Mà $a = 10, \hat{A} = 45^\circ, \hat{B} = 70^\circ$

$$\Rightarrow R = \frac{10}{2 \sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}; \quad b = \frac{a \cdot \sin 70^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 13,29$$

Mặt khác: $\hat{A} = 45^\circ, \hat{B} = 70^\circ \Rightarrow \hat{C} = 65^\circ$

Từ định lý sin ta suy ra: $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 12,82$.

Vậy $R = 5\sqrt{2}$; $b \approx 13,29$; $c \approx 12,82$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

LỜI GIẢI.

Áp dụng định lí côsin ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 29$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

LỜI GIẢI.

Ta có $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Theo định lí sin ta có $a = 2R \sin A = 2.3.\sin 30^\circ = 3$,

$b = 2R \sin B = 2.3.\sin 45^\circ = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R \sin C = 2.3.\sin 105^\circ \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2} \cdot 5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$$

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

LỜI GIẢI.

Theo giả thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 12^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\hat{A} = 120^\circ$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120° .

Dạng 2. Giải tam giác



Phương pháp

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh. Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí côsin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

VÍ DỤ 1. Giải tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó, biết $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 130^\circ$, $c = 6$

LỜI GIẢI.

Ta có: $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 130^\circ \Rightarrow \hat{C} = 35^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}; a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$$

Mà $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 130^\circ$, $\hat{C} = 35^\circ$, $c = 6$

$$\Rightarrow b = \frac{6 \cdot \sin 130^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 8; \quad a = \frac{6 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2,7$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 15^\circ \approx 6,212$.

Vậy $a \approx 2,7; b \approx 8; \hat{C} = 35^\circ; S \approx 6,212$.

VÍ DỤ 2. Giải tam giác ABC biết $b = 32; c = 45$ và $\hat{A} = 87^\circ$.

LỜI GIẢI.

Theo định lí côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \sin 87^\circ$$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lí sin ta có

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{32 \sin 87^\circ}{53,8} \Rightarrow \hat{B} \approx 36^\circ$$

Suy ra $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 87^\circ - 36^\circ = 57^\circ$

VÍ DỤ 3. Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.

LỜI GIẢI.

Ta có $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

VÍ DỤ 4. Giải tam giác ABC biết $a = 8, b = 9, c = 6$.

LỜI GIẢI.

Áp dụng định lí côsin, ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{81 + 36 - 64}{2 \cdot 9 \cdot 6} = \frac{53}{108}$$

Suy ra $\hat{A} \approx 60^\circ 36' 39''$.

Hoàn toàn tương tự, tính được $\hat{B} \approx 78^\circ 35' 5''$, $\hat{C} \approx 40^\circ 48' 16''$.

VÍ DỤ 5. Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 15^\circ$, $c = 6$ và $\hat{B} = 120^\circ$.

LỜI GIẢI.

Do $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 120^\circ$ nên $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 45^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta được:

$$a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{6}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 15^\circ = 3(\sqrt{3} - 1)$$

$$b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B = \frac{6}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{6}$$

Dạng 3. Chứng Minh Đẳng Thức, Bất Đẳng Thức Liên Quan Đến Các Yếu Tố Của Tam Giác, Tứ Giác.



Phương pháp

Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

LỜI GIẢI.

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí cosin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng: $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

LỜI GIẢI.

Áp dụng định lý côsin và công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ta có:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \quad \text{đpcm}$$

VÍ DỤ 3. Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức: $h_a = 2R \sin B \sin C$

LỜI GIẢI.

Ta có diện tích tam giác ABC : $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$.

Mặt khác, $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow h_a = \frac{2 \cdot \frac{abc}{4R}}{a} = \frac{bc}{2R} (1)$.

Theo định lý sin, ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow b = 2R \sin B; c = 2R \sin C (2)$

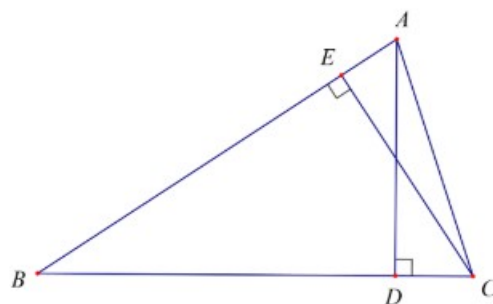
Thay (2) vào (1) ta được $h_a = \frac{2R \sin B \cdot 2R \sin C}{2R} = 2R \sin B \sin C$.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.

a) Chứng minh $\frac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \frac{BD}{BA} \cdot \frac{BE}{BC}$.

b) Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

LỜI GIẢI.



a) Áp dụng công thức tính diện tích tam giác cho hai tam giác BDE và tam giác ABC

ta có:

$$S_{BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot BE \cdot \sin B \text{ và } S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin B.$$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot BE \cdot \sin B}{\frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin B} = \frac{BD \cdot BE}{BA \cdot BC} = \frac{BD}{BA} \cdot \frac{BE}{BC}.$$

$$\text{b) Ta có: } \cos B = \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}. \text{ Mà } \frac{S_{BED}}{S_{ABC}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{BD}{BA} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos B = \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$$

+) Xét tam giác ABC và tam giác DEB ta có:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} = \frac{1}{3} \text{ và góc } B \text{ chung} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEB$$

$$(\text{c.g.c}) \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 3 \cdot DE = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (do } B \text{ là góc nhọn)}$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} : 2 = \frac{9}{2}.$$

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}.$$

LỜI GIẢI.

Áp dụng hệ quả của định lý sin và định lý cosin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$ và

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = R \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$$

Tương tự ta có:

$$\cot B = R \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}, \quad \cot C = R \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\cot A + \cot B + \cot C &= \frac{R}{abc} \left[(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) \right] = \frac{R}{abc} (2b^2 + 2c^2 + 2a^2 - a^2 - c^2 - b^2) \\ &= \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}\end{aligned}$$

Dạng 4. Nhận Dạng Tam Giác



Phương pháp

Sử dụng định lý côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

 **VÍ DỤ 1.** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

 **LỜI GIẢI.**

Áp dụng định lý côsin và sin ta có:

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

 **VÍ DỤ 2.** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

 **LỜI GIẢI.**

$$\text{Ta có: } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b + c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2) - a^2(b + c) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

 **VÍ DỤ 3.** Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

b) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

 LỜI GIẢI.

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right) \Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4 \sin^2 A \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R} \right)^2 = \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } C.$$

 **VÍ DỤ 4.** Cho tam giác ABC có $S = 2R^2 \sin A \sin B$. Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác vuông.

 LỜI GIẢI.

Từ định lý sin và công thức tính diện tích, suy ra diện tích của tam giác bằng

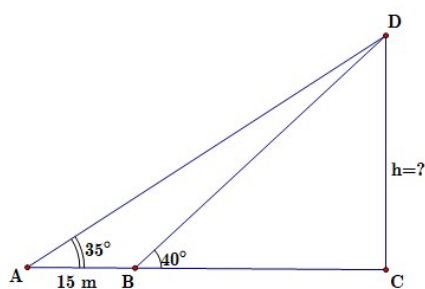
$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{(2R \sin A)(2R \sin B)(2R \sin C)}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Từ đó, do $S = 2R^2 \sin A \sin B$, suy ra $\sin C = 1$ và do đó $\hat{C} = 90^\circ$.

Suy ra điều phải chứng minh.

 **Dạng 5. Toán thực tế**

 **VÍ DỤ 1.** Để đo chiều cao của một tòa nhà, người ta chọn hai điểm A và B thẳng hàng với chân C của tòa nhà, cách nhau $15m$. Sử dụng giác kế, từ A và B tương ứng nhìn thấy đỉnh D của tòa nhà dưới các góc 35° và 40° so với phương nằm ngang. Hỏi chiều cao của tòa nhà đo được là bao nhiêu mét?



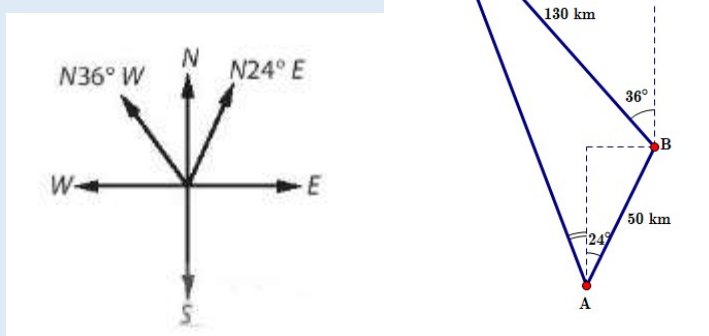
LỜI GIẢI.

Do $\widehat{CBD} = 40^\circ$, $\widehat{BAD} = 35^\circ$ nên $\widehat{ADB} = 40^\circ - 35^\circ = 5^\circ$. Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD ta được $BD = \frac{AB}{\sin D} \cdot \sin A = \frac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ$.

Từ đó suy ra chiều cao của tòa nhà bằng

$$h = CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} = \frac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 40^\circ \approx 63,45(m).$$

VÍ DỤ 2. Một tàu cá xuất phát từ đảo A, chạy 50km theo hướng $N24^\circ E$ đến đảo B để lấy thêm ngư cụ, rồi chuyển hướng $N36^\circ W$ chạy tiếp 130km đến ngư trường C.



- Tính khoảng cách từ vị trí xuất phát A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị đo kilômét).
- Tìm hướng từ A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

LỜI GIẢI.

a) Từ giả thiết suy ra $\widehat{ABC} = (90^\circ - 24^\circ) + (90^\circ - 36^\circ) = 120^\circ$. Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2500 + 16900 - 2 \cdot 50 \cdot 130 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 25900.$$

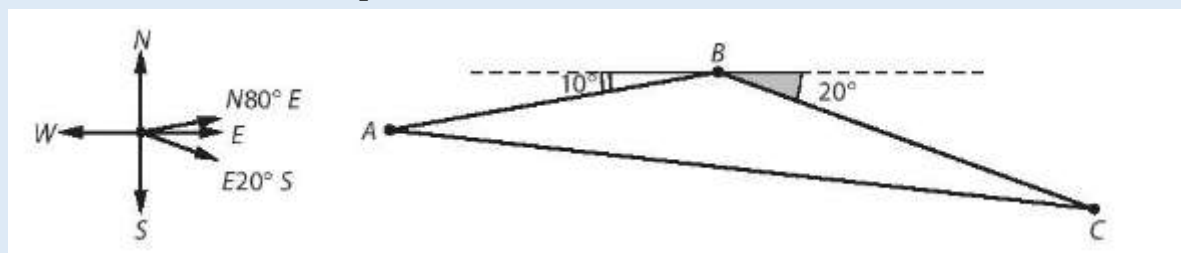
Suy ra $AC = 10\sqrt{259} \approx 161(km)$.

b) Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta được $\sin \widehat{CAB} = \frac{BC}{AC} \cdot \sin \widehat{ABC} \approx 0,6993$.

Suy ra $\widehat{CAB} = 44^\circ$ và do đó AC chênh về hướng tây một góc $44^\circ - 24^\circ = 20^\circ$ so với phương bắc.

Vậy hướng từ A tới C là $N20^\circ W$.

❶ VÍ DỤ 3. Một tàu du lịch xuất phát từ bãi biển Đồ Sơn (Hải Phòng), chạy theo hướng $N80^\circ E$ với vận tốc $20km/h$. Sau khi đi được 30 phút, tàu chuyển sang hướng $E20^\circ S$ giữ nguyên vận tốc và chạy tiếp 36 phút nữa đến đảo Cát Bà. Hỏi khi đó tàu du lịch cách vị trí xuất phát bao nhiêu kilômét?



❷ LỜI GIẢI.

Coi điểm xuất phát là A , điểm tàu chuyển hướng là B và đích đến là C . Theo giả thiết

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$$

Do tàu chạy từ A tới B với vận tốc $20km/h$ trong 30 phút, nên

$$AB = 20 \cdot \frac{30}{60} = 10(km).$$

Do tàu chạy từ B đến C với vận tốc $20km/h$ trong 36 phút, nên

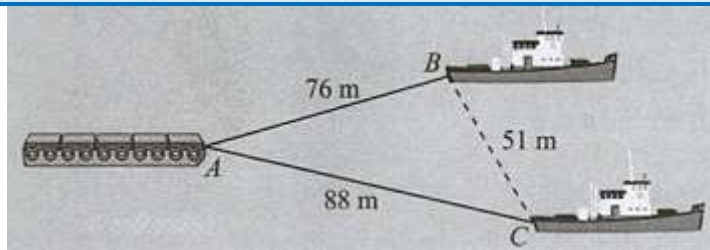
$$BC = 20 \cdot \frac{36}{60} = 12(km).$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 452$$

Suy ra $AC \approx \sqrt{452} \approx 21(km)$.

VÍ DỤ 4. Hai tàu kéo cách nhau $51m$, cùng kéo một chiếc xà lan như Hình 3. Biết chiều dài của hai sợi cáp lần lượt là $76m$ và $88m$, tính góc được tạo bởi hai sợi cáp.



LỜI GIẢI.

Gọi vị trí của xà lan và hai con tàu lần lượt là A, B, C . Theo hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{76^2 + 88^2 - 51^2}{2 \cdot 76 \cdot 88} \approx 0,8163.$$

Vậy góc được tạo bởi hai sợi cáp là: $\hat{A} \approx 35^\circ 16' 57''$.

VÍ DỤ 5. Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác có chiều dài một cạnh là $3,2m$ và hai góc kề cạnh đó có số đo lần lượt là 48° và 105° (Hình 5).



Hình 5

LỜI GIẢI.

Gọi ba đỉnh của cánh buồm là A, B, C . Đặt $a = BC; b = AC; c = AB$.

Ta có: $c = 3,2m; \hat{C} = 180^\circ - (105^\circ + 48^\circ) = 27^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Suy ra: $AC = b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{3,2 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 27^\circ} \approx 6,8(m);$

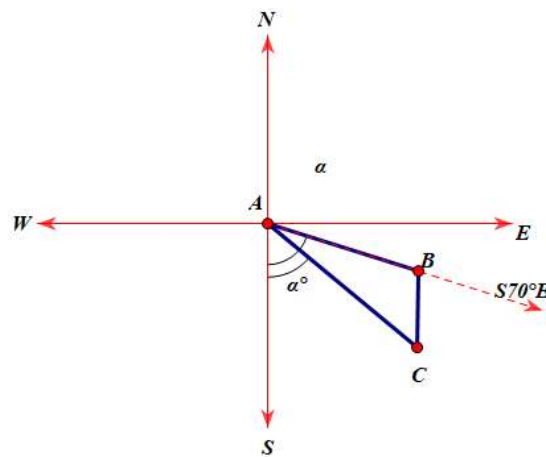
Ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 3,2 \cdot \sin 48^\circ \approx 8,1(m^2)$.

VÍ DỤ 6. Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc $70km/h$. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc $8km/h$. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

- Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.
- Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

LỜI GIẢI.

- Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.



Trong đó: B là nơi động cơ bị hỏng, C là vị trí neo đậu của tàu trên hòn đảo. Khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là đoạn AC (hay b). Ban đầu tàu di chuyển theo hướng $S70^\circ E$ nên $\widehat{BAS} = 70^\circ$. Sau khi động cơ bị hỏng, tàu trôi theo hướng Nam do đó BC song song với AS . $\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAS} = 110^\circ$ Quãng đường tàu đi được sau 90 phút hay 1,5 giờ (ngay trước khi hỏng động cơ) là: $70 \cdot 1,5 = 105(km)$ hay $c = 105$. Quãng đường tàu trôi tự do là: $8 \cdot 2 = 16(km)$ hay $a = 16$. Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Rightarrow b^2 = 16^2 + 105^2 - 2 \cdot 16 \cdot 105 \cdot \cos 110^\circ \approx 12150,632 \Rightarrow b \approx 110,23$. Vậy khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là khoảng 110,23 km.

- Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

Theo sơ đồ, hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là $S\alpha^\circ E$ với $\alpha^\circ = \widehat{CAS}$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}$$

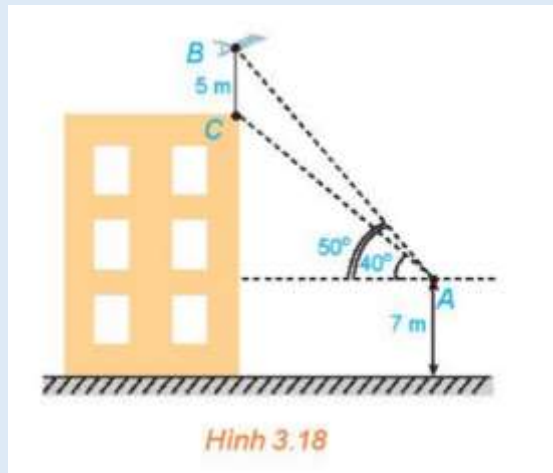
$$\text{Mà } \hat{B} = 110^\circ; b \approx 110,23; a = 16.$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{16 \cdot \sin 110^\circ}{110,23} \approx 0,136 \Rightarrow \hat{A} \approx 7,84^\circ \left(\text{do } \hat{A} < 90^\circ \right)$$

$$\Rightarrow \alpha^\circ \approx 70^\circ - 7,84^\circ = 62,16^\circ.$$

Vậy hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là $S62,16^\circ E$.

VÍ DỤ 7. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ một vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (H.3.18)



Hình 3.18

- Tính các góc của tam giác ABC.
- Tính chiều cao của tòa nhà.

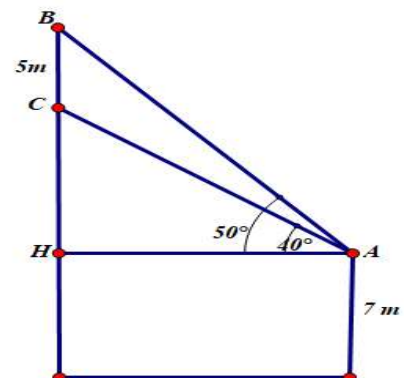
LỜI GIẢI.

- Tính các góc của tam giác ABC.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BC.

$$\text{Ta có: } \widehat{HAB} = 50^\circ; \widehat{HAC} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ \quad (1)$$

Xét tam giác ABH, vuông tại H ta có:



$$\hat{H} = 90^\circ; \widehat{BAH} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{HBA} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \text{ hay } \widehat{CBA} = 40^\circ.$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{BCA} = 180^\circ - 40^\circ - 10^\circ = 130^\circ$.

Vậy ba góc của tam giác ABC lần lượt là: $\hat{A} = 10^\circ; \hat{B} = 40^\circ; \hat{C} = 130^\circ$.

b) Tính chiều cao của tòa nhà.

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC , ta được:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$\text{Mà: } BC = 5(m); \quad \hat{C} = 130^\circ; \hat{A} = 10^\circ \Rightarrow AB = \frac{5 \cdot \sin 130^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 22(m)$$

Xét tam giác ABH , vuông tại H ta có:

$$\sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin \widehat{BAH}$$

$$\text{Mà: } AB \approx 22(m); \quad \widehat{BAH} = 50^\circ$$

$$\Rightarrow BH \approx 22 \cdot \sin 50^\circ \approx 16,85(m)$$

$$\text{Vậy chiều cao của tòa nhà là: } BH - BC + 7 = 16,85 - 5 + 7 = 18,85(m)$$

VÍ DỤ 8. Để tránh núi, giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



LỜI GIẢI.

Bước 1:

Áp dụng định lý cos trong tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 105^\circ \Rightarrow AC \approx 11,2(km)$$

Bước 2:

Lại có: Theo định lý sin thì

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC} \Rightarrow \sin \angle ACB = \frac{8 \cdot \sin 105^\circ}{11,2} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 43,6^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 135^\circ - 43,6^\circ = 91,4^\circ$$

Bước 3:

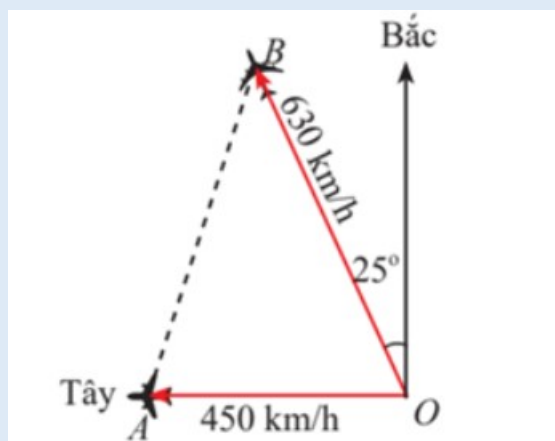
Áp dụng định lí cos trong tam giác ACD ta có:

$$AD^2 = 12^2 + 11,2^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11,2 \cos 91,4^\circ \Rightarrow AD \approx 16,6(km)$$

Bước 4:

Độ dài đường mới giảm số kilomet so với đường cũ là: $12 + 6 + 8 - 16,6 = 9,4(km)$.

VÍ DỤ 9. Hai máy bay cùng cất cánh từ một sân bay nhưng bay theo hai hướng khác nhau. Một chiếc di chuyển với vận tốc 450 km/h theo hướng tây và chiếc còn lại di chuyển theo hướng lệch so với hướng bắc 25° về phía tây với tốc độ 630 km/h (Hình bên). Sau 90 phút, hai máy bay cách nhau bao nhiêu kilômét? Giả sử chúng đang ở cùng độ cao.



LỜI GIẢI.

Ta có: $\widehat{BOA} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Sau 90 phút = 1,5 giờ:

Máy bay thứ nhất đi được quãng đường (OA) là: $450 \cdot 1,5 = 675 (km)$

Máy bay thứ hai đi được quãng đường (OB) là: $630 \cdot 1,5 = 945 (km)$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB, ta có:

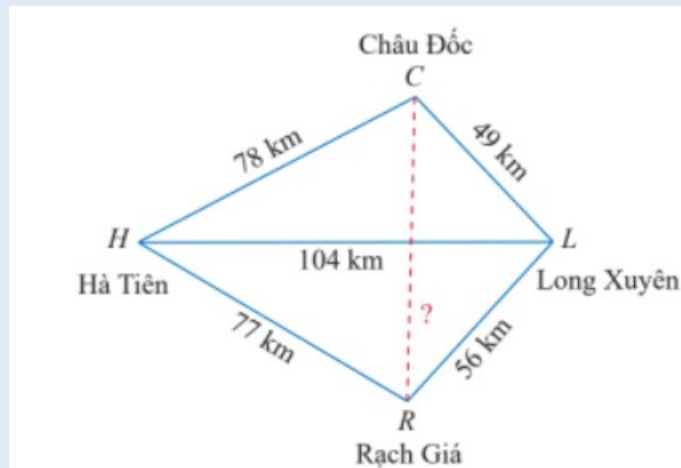
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{BOA}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 675^2 + 945^2 - 2 \cdot 675 \cdot 945 \cdot \cos 65^\circ$$

$$\Rightarrow AB \approx 900$$

Vậy sau 90 phút, hai máy bay cách nhau khoảng 900 km.

VÍ DỤ 10. Trên bản đồ địa lí, người ta thường gọi tứ giác với bốn đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên, Châu Đốc, Long Xuyên, Rạch Giá là tứ giác Long Xuyên. Dựa theo các khoảng cách đã cho trên Hình vẽ, tính khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá.



LỜI GIẢI.

Bước 1: Áp dụng hệ quả của định lí cosin trong tam giác HCL, ta có:

$$\cos \widehat{CHL} = \frac{CH^2 + HL^2 - CL^2}{2 \cdot CH \cdot HL} = \frac{78^2 + 104^2 - 49^2}{2 \cdot 78 \cdot 104} = \frac{4833}{5408}$$

$$\Rightarrow \widehat{CHL} \approx 26^\circ 39' 40,05''$$

Áp dụng hệ quả của định lí cosin trong tam giác HLR, ta có:

$$\cos \widehat{LHR} = \frac{HL^2 + HR^2 - LR^2}{2 \cdot HL \cdot HR} = \frac{104^2 + 77^2 - 56^2}{2 \cdot 104 \cdot 77} = \frac{13609}{16016}$$

$$\Rightarrow \widehat{LHR} \approx 31^\circ 49' 10,4''$$

$$\Rightarrow \widehat{CHR} \approx 58^\circ 28' 50,45''$$

Bước 2: Áp dụng định lí cosin:

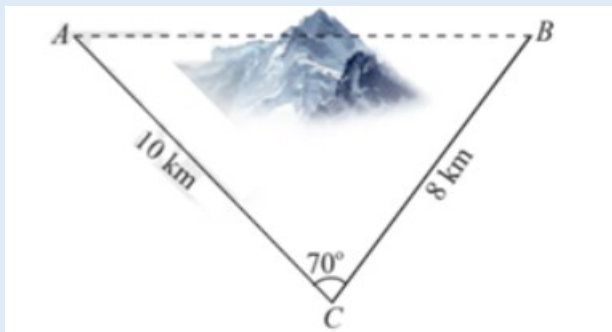
$$CR^2 = HC^2 + HR^2 - 2 \cdot HC \cdot HR \cdot \cos \widehat{CHR}$$

$$\Leftrightarrow CR^2 = 78^2 + 77^2 - 2 \cdot 78 \cdot 77 \cdot \cos 58^\circ 28' 50,45''$$

$$\Rightarrow CR \approx 75,72$$

Vậy khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá là 75,72 km.

VÍ DỤ 11. Để lắp đường dây điện cao thế từ vị trí A đến vị trí B, do phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10 km, sau đó nối đường dây từ vị trí C đến vị trí B dài 8 km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 70° . Tính chiều dài tăng thêm vì không thể nối trực tiếp từ A đến B.



LỜI GIẢI.

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$$

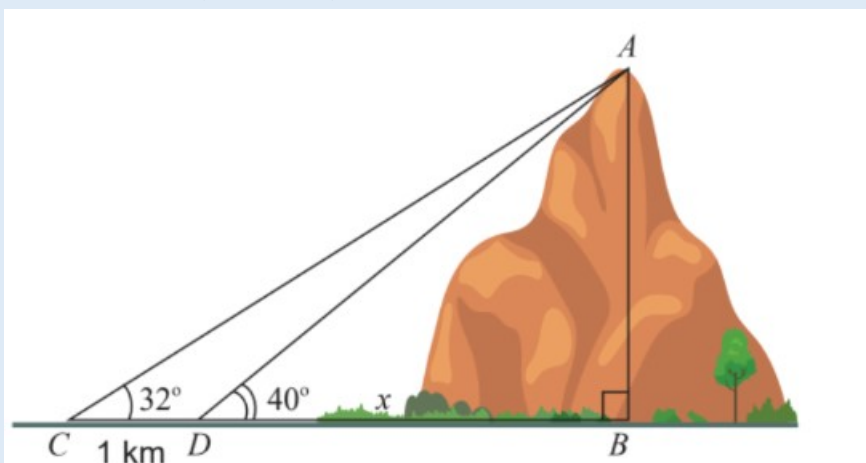
$$\Leftrightarrow AB^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 70^\circ$$

$$\Rightarrow AB \approx 10,45$$

Vậy chiều dài tăng thêm vì không thể nối trực tiếp là:

$$AC + CB - AB = 10 + 8 - 10,45 = 7,55 \text{ (km)}.$$

VÍ DỤ 12. Tính chiều cao AB của một ngọn núi. Biết tại hai điểm C, D cách nhau 1 km trên mặt đất (B, C, D thẳng hàng), người ta nhìn thấy đỉnh A của núi với góc nâng lần lượt là 32° và 40° (Hình vẽ).



LỜI GIẢI.

Tam giác ABC vuông tại B nên ta có:

$$\tan C = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow AB = \tan 32^\circ \cdot (1 + x)$$

Tam giác ADB vuông tại B nên ta có:

$$\tan D = \frac{AB}{DB} \Leftrightarrow AB = \tan 40^\circ \cdot x$$

$$\Rightarrow \tan 32^\circ \cdot (1 + x) = \tan 40^\circ \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (\tan 40^\circ - \tan 32^\circ) = \tan 32^\circ$$

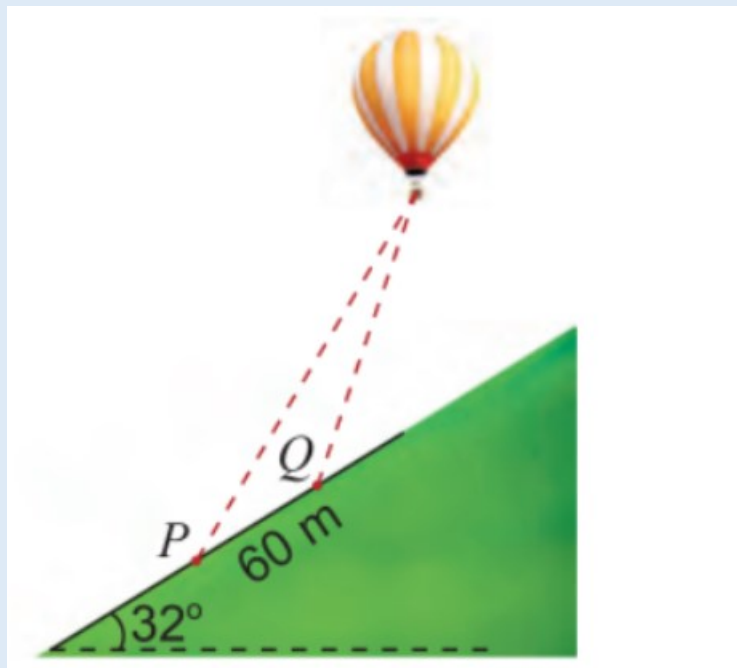
$$\Leftrightarrow x = \frac{\tan 32^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 32^\circ}$$

$$\Rightarrow x \approx 2,9 \text{ (km)}$$

$$\Rightarrow AB \approx \tan 40^\circ \cdot 2,92 \approx 2,45 \text{ (km)}$$

Vậy chiều cao của ngọn núi là 2,45 km.

VÍ DỤ 13. Hai người quan sát khinh khí cầu tại hai địa điểm P và Q nằm ở sườn đồi nghiêng 32° so với phương ngang, cách nhau 60 m (Hình bên). Người quan sát tại P xác định góc nâng của khinh khí cầu là 62° . Cùng lúc đó, người quan sát tại Q xác định góc nâng của khinh khí cầu đó là 70° . Tính khoảng cách từ Q đến khinh khí cầu.



LỜI GIẢI.

Gọi A là vị trí của khinh khí cầu, Pt là đường sườn đồi như hình.

Tại P, góc nâng của khinh khí cầu là $62^\circ \Rightarrow \hat{P} = 62^\circ - 32^\circ = 30^\circ$.

Tại Q, góc nâng của khinh khí cầu là $70^\circ \Rightarrow \widehat{AQ}t = 70^\circ - 32^\circ = 38^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{AQP} = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$$

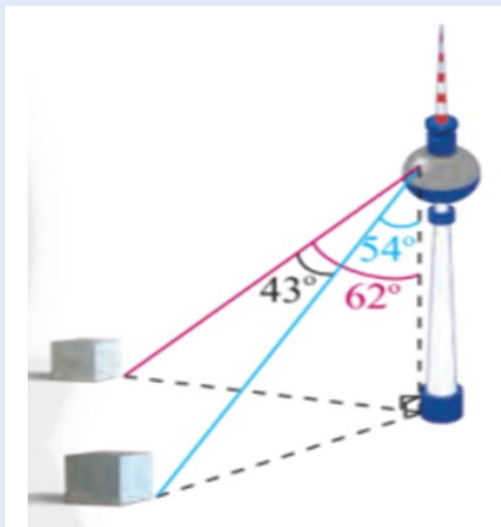
$$\text{và } \hat{A} = 180^\circ - 142^\circ - 30^\circ = 8^\circ.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác APQ, ta có:

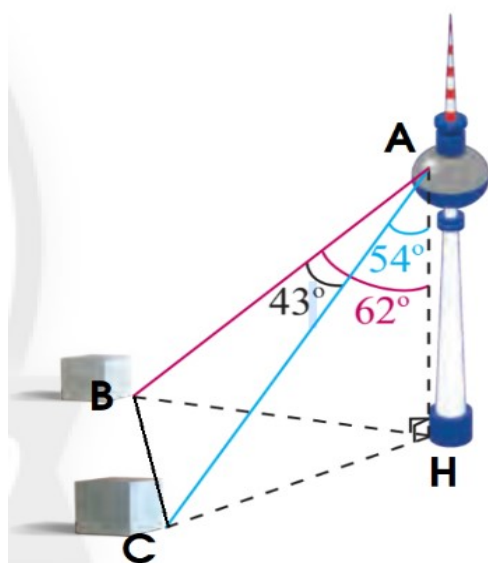
$$\frac{PQ}{\sin A} = \frac{QA}{\sin P} \Rightarrow QA = \sin P \cdot \frac{PQ}{\sin A} = \sin 30^\circ \cdot \frac{60}{\sin 8^\circ} \approx 215,56 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách từ Q đến kinh khí cầu là 215,56 m.

VÍ DỤ 14. Một người đứng ở trên một tháp truyền hình cao 352 m so với mặt đất, muốn xác định khoảng cách giữa hai cột mốc trên mặt đất bên dưới. Người đó quan sát thấy góc được tạo bởi hai đường ngắm tới hai mốc này là 43° , góc giữa phương thẳng đứng và đường ngắm tới một điểm mốc trên mặt đất là 62° và điểm mốc khác là 54° (Hình bên dưới). Tính khoảng cách giữa hai cột mốc này.



LỜI GIẢI.



Gọi các điểm A, B, C, H như hình trên. Xét tam giác ABH ta có:

$$AH = 352, \widehat{BAH} = 62^\circ$$

$$\text{Mà } \cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = 352 : \cos 62^\circ \approx 749,78.$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = 352 : \cos 54^\circ \approx 598,86$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC, ta có:

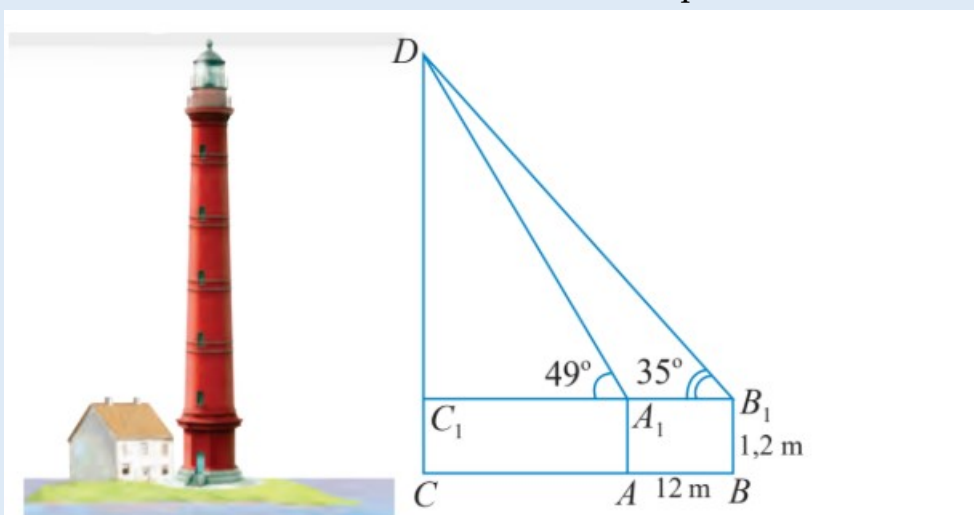
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 749,78^2 + 598,86^2 - 2 \cdot 749,78 \cdot 598,86 \cdot \cos 43^\circ$$

$$\Rightarrow BC \approx 513,84.$$

Vậy khoảng cách giữa hai cột mốc này là 513,84 m.

VÍ DỤ 15. Muốn đo chiều cao của một ngọn tháp, người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của hai giác kế có chiều cao là $h = 1,2$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ, \widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



LỜI GIẢI.

$$\text{Ta có: } \widehat{DA_1C_1} = \widehat{A_1DB_1} + \widehat{DB_1C_1} \Rightarrow \widehat{A_1DB_1} = 49^\circ - 35^\circ = 14^\circ$$

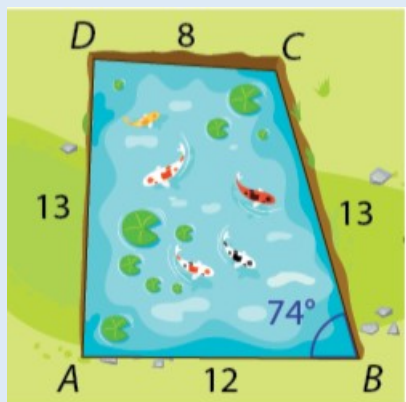
$$\text{Áp dụng định lí sin trong tam giác } A_1DB_1, \text{ ta có: } \frac{A_1D}{\sin \widehat{B_1}} = \frac{A_1B_1}{\sin D} \Leftrightarrow \frac{A_1D}{\sin 35^\circ} = \frac{12}{\sin 14^\circ}$$

$\Rightarrow A_1D = \sin 35^\circ \cdot \frac{12}{\sin 14^\circ} \approx 28,45$. Áp dụng định lý sin trong tam giác A_1DC_1 , ta có:

$$\frac{A_1D}{\sin C_1} = \frac{C_1D}{\sin A_1} \Leftrightarrow \frac{28,45}{\sin 90^\circ} = \frac{C_1D}{\sin 49^\circ} \Rightarrow C_1D = \sin 49^\circ \cdot \frac{28,45}{\sin 90^\circ} \approx 21,47.$$

Do đó, chiều cao CD của tháp là: $21,47 + 1,2 = 22,67 (m)$.

VÍ DỤ 16. Bác Tiến mua được một mảnh đất, trên đó có sẵn một ao cá hình dạng tứ giác ABCD (Hình dưới). Bác muốn tính diện tích ao cá này nên đã tiến hành đo được chiều dài bốn cạnh lần lượt là 8 m, 13 m, 12 m và 13 m. Đứng từ đỉnh B của ao cá, bác Tiến dùng thước ngắm đo được số đo $\widehat{ABC} = 74^\circ$. Với những dữ liệu nói trên, hãy giúp bác Tiến tính diện tích ao cá (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



LỜI GIẢI.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 12^2 + 13^2 - 2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \cos 74^\circ \approx 227m.$$

$$\text{Do đó } AC = \sqrt{227} \approx 15m.$$

Khi đó diện tích ao cá là $S = S_{ADC} + S_{ACB}$

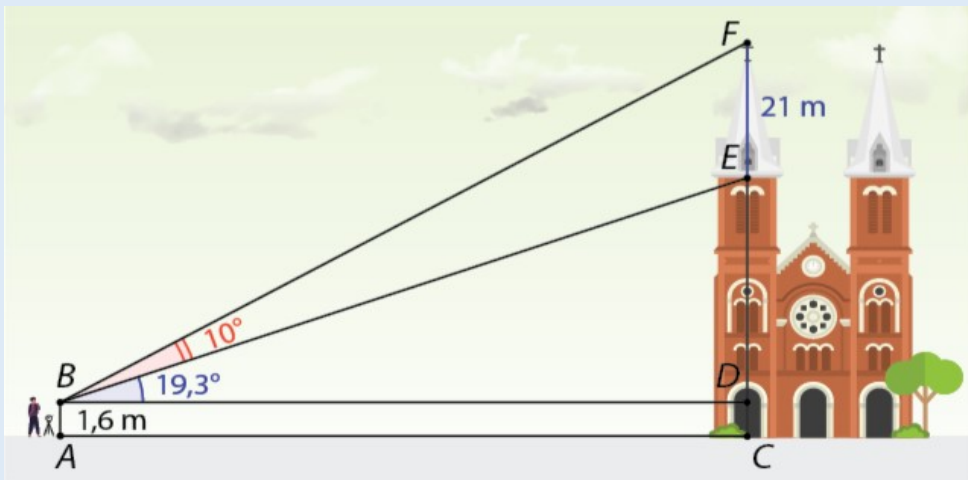
$$\text{Xét tam giác } ADC, \text{ ta có } p = \frac{AD + DC + AC}{2} = \frac{13 + 8 + 15}{2} = 18$$

$$\text{Suy ra } S_{ADC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-13)(18-8)(18-15)} \approx 52m^2$$

Tương tự áp dụng công thức Heron, tính được $S_{ACB} \approx 74,8m^2$.

$$\text{Diện tích ao cá là } S = S_{ADC} + S_{ACB} = 56,8m^2.$$

VÍ DỤ 17. Nhà thờ Đức Bà tọa lạc tại trung tâm Thành phố Hồ Chí Minh được khánh thành vào tháng 4 năm 1880, tuy nhiên lúc đó nhà thờ chưa có hai mái hình chóp. Cho đến năm 1895, người ta mới xây thêm hai mái hình chóp này để che gác chuông, mỗi mái cao 21 m và vẫn giữ nguyên hình dáng cho đến hiện nay. Trong một buổi học tập ngoài trời tại nhà thờ Đức Bà, giáo viên bộ môn Toán đã chia sẻ cho học sinh lớp 10A về lịch sử nói trên của nhà thờ. Sau đó giáo viên chia lớp thành nhiều nhóm, các nhóm cùng thực hiện một dự án với đề bài: "Xác định khoảng cách từ mắt mình đến đỉnh mái của nhà thờ (đoạn BF) và chiều cao nhà thờ (đoạn CF)". Bạn Minh dùng giác kế xác định được $\widehat{FBE} = 10^\circ$, $\widehat{EBD} = 19,3^\circ$ (Hình vẽ). Là một thành viên trong nhóm bạn Minh, hãy giúp nhóm hoàn thành nhiệm vụ được giao, biết rằng khoảng cách từ mắt bạn Minh đến mặt đất là 1,6 m.



LỜI GIẢI.

Đặt $DE = x$.

Xét tam giác BDF ta có $\sin 29,3^\circ = \frac{DF}{BF} \Rightarrow BF = \frac{21 + x}{\sin 29,3^\circ} = \frac{21 + x}{0,49}$.

Xét tam giác DEB ta có $\sin 19,3^\circ = \frac{x}{BE} \Rightarrow BE = \frac{x}{\sin 19,3^\circ} = \frac{x}{0,33}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác EFB ta được

$$EF^2 = FB^2 + BE^2 - 2FB \cdot BE \cos 10^\circ$$

$$\Rightarrow 21^2 = \left(\frac{21 + x}{0,49} \right)^2 + \left(\frac{x}{0,33} \right)^2 - 2 \cdot \frac{21 + x}{0,49} \cdot \frac{x}{0,33} \cdot \cos 10^\circ \Rightarrow x \approx 26,15m.$$

Vậy $CF = CD + DE + EF = 1,6 + 26,15 + 21 = 48,75$ m.



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

Câu 1: Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2.5.8} = \frac{1}{2}$. Do đó, $\hat{A} = 60^\circ$.

Câu 2: Tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

- A. $BC = 1$. B. $BC = 2$. C. $BC = \sqrt{2}$. D. $BC = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \hat{A} = 2^2 + 1^2 - 2.2.1.\cos 60^\circ = 3 \Rightarrow BC = \sqrt{3}.$$

Câu 3: Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC

- A. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. B. $AC = 5\sqrt{3}$. C. $AC = 5\sqrt{2}$. D. $AC = 10$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lí hàm sin, ta có $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4: Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. D. $R = 10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định lý sin, ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin \widehat{A}} = \frac{10}{2 \cdot \sin 30^\circ} = 10$.

Câu 5: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$ và $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 3$. B. $R = 3\sqrt{3}$. C. $R = \sqrt{3}$. D. $R = 6$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý Cosin, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

$= 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 27 \Leftrightarrow BC^2 = 27 \Leftrightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2$. Suy ra tam giác ABC vuông tại B , do đó bán kính $R = \frac{AC}{2} = 3$.

Câu 6: Tam giác ABC có $BC = 21\text{cm}$, $CA = 17\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{85}{2}\text{cm}$. B. $R = \frac{7}{4}\text{cm}$. C. $R = \frac{85}{8}\text{cm}$. D. $R = \frac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 24$.

Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{24 \cdot (24-21) \cdot (24-17) \cdot (24-10)} = 84 \text{ cm}^2.$$

Vậy bán kính cần tìm là $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{21 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot 84} = \frac{85}{8} \text{ cm}$.

Câu 7: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$. B. $S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. C. $S_{\triangle ABC} = 9$. D. $S_{\triangle ABC} = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\triangle ABC} = 8$. B. $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$. C. $S_{\triangle ABC} = 4$. D. $S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 4$.

Câu 9: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\Delta ABC} = 16$.

B. $S_{\Delta ABC} = 48$.

C. $S_{\Delta ABC} = 24$.

D. $S_{\Delta ABC} = 84$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Do đó $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Câu 10: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a = 3\sqrt{3}$.

B. $h_a = \sqrt{3}$.

C. $h_a = 3$.

D. $h_a = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 27 \longrightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \longrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3$.

Câu 11: Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h uất phát từ đỉnh A của tam giác.

A. $h = 2\sqrt{3}$.

B. $h = 4\sqrt{3}$.

C. $h = 2$.

D. $h = 4$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A .

Tam giác vuông AHC , có $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \longrightarrow AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Câu 12: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC . Tính BB' .

A. $BB' = 8$.

B. $BB' = \frac{84}{5}$.

C. $BB' = \frac{168}{17}$.

D. $BB' = \frac{84}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = \frac{1}{2}b \cdot BB' \longleftrightarrow 84 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot BB' \longrightarrow BB' = \frac{168}{17}$.

Câu 13: Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2 . Giá trị $\sin A$ bằng:

A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sin A = \frac{3}{8}$.

C. $\sin A = \frac{4}{5}$.

D. $\sin A = \frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{9}$.

Câu 14: Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$.

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. a^2 .

D. $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác ABD là $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2$.

Câu 15: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm^2

B. $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$

C. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

D. 15 cm^2 .

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a .

Theo định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2.4 \Leftrightarrow a = 8 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Câu 16: Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$.

B. $r = 2$.

C. $r = \sqrt{3}$.

D. $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 49 \longrightarrow BC = 7.$$

$$\text{Diện tích } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}.$$

Câu 17: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 16$.

B. $r = 7$.

C. $r = \frac{7}{2}$.

D. $r = 8$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24.$$

$$\text{Suy ra } S = \sqrt{24(24 - 21)(24 - 17)(24 - 10)} = 84.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}.$$

Câu 18: Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

A. $r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $r = \frac{a\sqrt{2}}{5}$.

C. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $r = \frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lại có $S = pr \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 19: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$ cm.

B. $r = \sqrt{2}$ cm.

C. $r = 2$ cm.

D. $r = 3$ cm.

Lời giải

Chọn C

Dùng Pitago tính được $AC = 8$, suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 12$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2}AB.AC = 24$. Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = 2$ cm.

Câu 20: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC

A. $AC = \sqrt{3}$.

B. $AC = \sqrt{2}$.

C. $AC = 2\sqrt{3}$.

D. $AC = 2$.

Lời giải

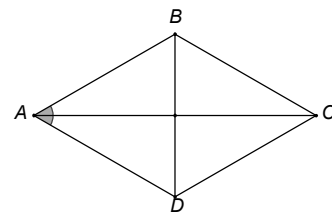
Chọn A

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos \widehat{ABC}$$

$$= 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$$



Câu 21: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng:

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều cạnh a , gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $AM \perp BC$ suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 - BM^2} \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Vậy bán kính cần tính là $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{a \sqrt{3}}{3}$.

Câu 22: Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = \frac{12}{5}$ cm và $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \sqrt{3}$ cm.

B. $R = 1,5$ cm.

C. $R = 2$ cm.

D. $R = 3,5$ cm.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC vuông tại A , có đường cao $AH \Rightarrow AB \cdot AC = AH^2$ (*).

Mặt khác $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4} AC$ thế vào (*), ta được $\frac{3}{4} AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{5}$.

Suy ra $AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$ cm.

Câu 23: Cho tam giác ABC có $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 6\sqrt{3}$ và $CA = 9$. Gọi D là trung điểm BC . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

A. $R = \frac{9}{6}$.

B. $R = 3$.

C. $R = 3\sqrt{3}$.

D. $R = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì D là trung điểm của $BC \Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}$. Tam giác ABD có $AB = BD = DA = 3\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác ABD đều. Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{\sqrt{3}}{3} AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3$.

Câu 24: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích s . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì

khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

- A. $2S$. B. $3S$. C. $4S$. D. $6S$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \widehat{ACB}$.

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3AC) \cdot (2BC) \cdot \sin \widehat{ACB} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = 6S$.

Câu 25: Tam giác ABC có $BC = a$ và $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

- A. 60° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \widehat{ACB}$.

Vì a, b không đổi và $\sin \widehat{ACB} \leq 1, \forall C$ nên suy ra $S_{\Delta ABC} \leq \frac{ab}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin \widehat{ACB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$.

Câu 26: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC = 3$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$. B. $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $BM \perp CN \longrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 5a^2 - 2bc \cos A \longrightarrow bc = \frac{2a^2}{\cos A}$.

Khi đó $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{\cos A} \cdot \sin A = a^2 \tan A = 3\sqrt{3}$.

Câu 27: Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = \frac{a}{2}$.

B. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $r = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

D. $r = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $AC = AB = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Suy ra } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}.$$

Câu 28: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R .

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $1 + \sqrt{2}$.

B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Giả sử } AC = AB = a \longrightarrow BC = a\sqrt{2}. \text{ Suy ra } R = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}. \text{ Vậy } \frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}.$$

Câu 1: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Nếu giữa a, b, c có liên hệ $b^2 + c^2 = 2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $2a\sqrt{3}$.

D. $3a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hệ thức trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

$$\text{Mà: } b^2 + c^2 = 2a^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{2a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = m$ và $AC = n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng:

A. $m^2 + n^2 = 3(a^2 + b^2)$.

B. $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

C. $2(m^2 + n^2) = a^2 + b^2$.

D. $3(m^2 + n^2) = a^2 + b^2$.

Lời giải

Chọn B

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có: $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{m}{2}$.

BO là trung tuyến của tam giác $\triangle ABC$

$$\Rightarrow BO^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Câu 29: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

A. 61 hải lí.

B. 36 hải lí.

C. 21 hải lí.

D. 18 hải lí.

Lời giải

Chọn B

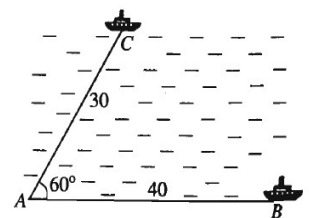
Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\hat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC , ta có

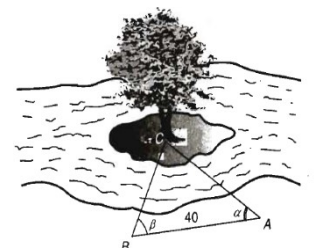
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.



Câu 30: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc



cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 53 m . B. 30 m .

C. 41,5 m . D. 41 m .

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC , ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

Vì $\sin C = \sin(\alpha + \beta)$ nên $AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ m}$.

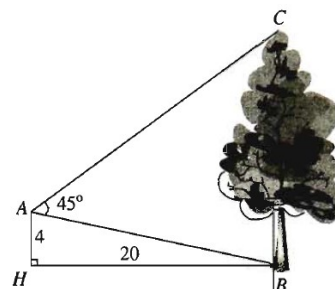
Câu 31: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{m}$, $HB = 20\text{m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 17,5m . B. 17m .

C. 16,5m . D. 16m .



Lời giải

Chọn B

Trong tam giác AHB , ta có $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \rightarrow \widehat{ABH} \approx 11^\circ 19'$.

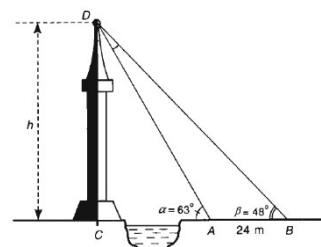
Suy ra $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 78^\circ 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \approx 17\text{m}.$$

Câu 32: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được



$$AB = 24 \text{ m}, \widehat{CAD} = 63^\circ, \widehat{CBD} = 48^\circ.$$

Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

A. 18m .

B. 18,5m .

C. 60m .

D. 60,5m .

Lời giải

Chọn D

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD , ta có $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}$.

Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

$$\text{Do đó } AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91 \text{ m}.$$

Trong tam giác vuông ACD , có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 61,4 \text{ m}$.

Câu 33: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m . Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 12m .

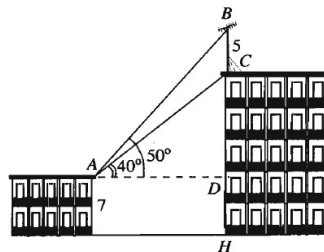
B. 19m .

C. 24m .

D. 29m .

Lời giải

Chọn B



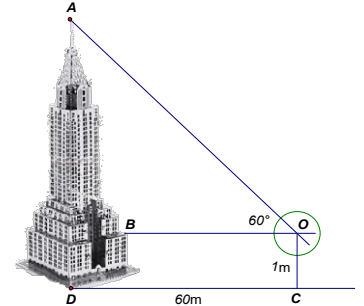
Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \longrightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5 \text{ m}$. Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \longrightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9 \text{ m}$. Vậy

$$CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9 \text{ m.}$$

Câu 34: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{m}$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:

- A. 40m . B. 114m .
C. 105m . D. 110m .



Lời giải

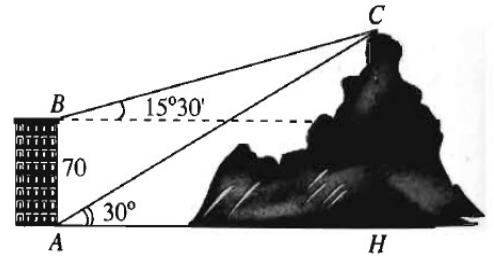
Chọn C

Tam giác OAB vuông tại B , có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3} \text{ m.}$

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1) \text{ m.}$

Câu 35: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 135m . B. 234m .
C. 165m . D. 195m .



Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$. Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 14^\circ 30'}$

$$\text{Do đó } AC = b = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4 \text{ m.}$$

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên

$$CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7 \text{ m. Vậy ngọn núi cao khoảng } 135 \text{ m.}$$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

Câu 1. Cho tam giác ABC có $b = 7 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}, \hat{A} = 120^\circ$. Khi đó:

- a) $a = \sqrt{127} \text{ cm}$
- b) $\cos B \approx 0,21$
- c) $\cos C \approx 0,91$
- d) $R \approx 6,03(\text{cm})$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 109.$$

Do đó, $a = \sqrt{109} \text{ cm}$.

$$\text{b) Ta có } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{109 + 5^2 - 7^2}{2\sqrt{109} \cdot 5} \approx 0,81.$$

$$\text{c) Tương tự, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{109 + 7^2 - 5^2}{2\sqrt{109} \cdot 7} \approx 0,91.$$

d) Áp dụng định lí sin trong tam giác, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ nên } R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{\sqrt{109}}{2 \cdot \sin 120^\circ} \approx 6,03(\text{cm}).$$

Câu 2. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 6 \text{ m}, b = 8 \text{ m}, c = 10 \text{ m}$. Khi đó:

- a) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- b) $p = 16(\text{cm})$
- c) $S = 24(\text{cm}^2)$
- d) $r = 4(\text{cm})$

Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

a) Đúng theo công thức

b) Ta có $p = (6 + 8 + 10) : 2 = 12(cm)$.

c) Áp dụng công thức Heron trong tam giác, ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ hay } S = \sqrt{12 \cdot (12-6) \cdot (12-8) \cdot (12-10)} = 24 (cm^2).$$

d) Mà $S = p \cdot r$ nên $r = S : p = 24 : 12 = 2(cm)$.

Câu 3. Cho tam giác ABC biết $a = 3cm, b = 4cm, \hat{C} = 30^\circ$. Khi đó:

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

b) $c \approx 3,05(cm)$

c) $\cos A \approx 0,68$

d) $\hat{B} \approx 100^\circ$

Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

b) $c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 25 - 12\sqrt{3}$.

Do đó, $c \approx 2,05(cm)$.

b) Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + (25 - 12\sqrt{3})^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}} \approx 0,68$.

c) Suy ra $\hat{A} \approx 47,2^\circ$. Do đó, $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 180^\circ - 47,2^\circ - 30^\circ = 102,8^\circ$.

Câu 4. Cho tam giác ABC biết $a = 8dm, \hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 60^\circ$. Khi đó:

a) $\hat{A} = 75^\circ$

b) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

c) $b \approx 5,26(cm)$

d) $c \approx 3,17(cm)$

Lời giải

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai

d) Sai

a) Trong $\triangle ABC$ ta có: $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$.

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{8}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

c) Do đó, $b = \frac{8 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 5,86(cm)$;

d) $c = \frac{8 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 7,17(cm)$

Câu 5. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 3cm, b = 4cm, c = 5cm$. Khi đó:

a) $p = 12(cm)$

b) $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

c) $S_{ABC} = 6(cm^2)$.

d) $R = 3,5(cm)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = 6(cm)$. Áp dụng công thức Heron ta có:

b) c) $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6 \cdot (6-3) \cdot (6-4) \cdot (6-5)} = 6(cm^2)$.

d) Áp dụng công thức tính diện tích $S = \frac{abc}{4R}$, suy ra $R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = 2,5(cm)$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó:

a) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

b) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$;

b) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$;

c) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

b) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$;

c) Góc A nhọn khi và chỉ khi $\cos A > 0$ hay $b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$.

d) Góc A tù khi và chỉ khi $\cos A < 0$ hay $b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$.

Câu 7. Cho tam giác ABC biết các cạnh $a = 52,1\text{cm}$, $b = 85\text{cm}$, $c = 54\text{cm}$. Khi đó:

a) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

b) $A \approx 32^\circ$

c) $\hat{B} \approx 126^\circ$

d) $\hat{C} \approx 38^\circ$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Theo hệ quả định lí $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

b) $\cos A = \frac{85^2 + 54^2 - 52,1^2}{2 \cdot 85 \cdot 54} \approx 0,81 \Rightarrow A \approx 36^\circ$;

c) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{52,1^2 + 54^2 - 85^2}{2 \cdot 52,1 \cdot 54} \approx -0,28 \Rightarrow \hat{B} \approx 106^\circ$

d) $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 38^\circ$.

Câu 8. Cho tam giác ABC với $a = 49,4\text{cm}$; $b = 26,4\text{cm}$ và $\hat{C} = 47^\circ 20'$. Khi đó:

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

b) $c \approx 47\text{cm}$

c) $\hat{A} \approx 137^\circ$

d) $\hat{B} \approx 31^\circ 40'$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Theo định lí cosin, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$= (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos(47^\circ 20') \approx 1369,66$.

b) Suy ra: $c \approx 37\text{cm}$.

c) Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{(26,4)^2 + 1369,66 - (49,4)^2}{2 \cdot 26,4 \cdot 37} \approx -0,191 \Rightarrow \hat{A} \approx 101^\circ$

d) Ta có: $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \approx 31^\circ 40'$

Câu 9. Cho tam giác ABC biết cạnh $a = 137,5 \text{ cm}$, $\hat{B} = 83^\circ$, $\hat{C} = 57^\circ$. Khi đó:

a) $\hat{A} = 40^\circ$

b) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R$

c) $R \approx 106,96 \text{ cm}$

d) $b \approx 179,4 \text{ cm}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Ta có: $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (83^\circ + 57^\circ) = 40^\circ$

b) Theo định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

c) Suy ra: $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{137,5}{2 \sin 40^\circ} \approx 106,96 \text{ cm};$

d) $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{137,5 \cdot \sin 83^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 212,32 \text{ cm}; c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{137,5 \cdot \sin 57^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 179,4 \text{ cm}.$

Câu 10. Cho tam giác ABC có số đo các cạnh lần lượt là 7, 9 và 12. Khi đó:

a) $p = 14$

b) $S = 13\sqrt{5}$

c) $R = \frac{7\sqrt{5}}{10}$

d) $r = \sqrt{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Giả sử: $a = 7, b = 9, c = 12$.

Đặt $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+9+12}{2} = 14$ (nửa chu vi tam giác).

b) Theo công thức Hê-rông, ta có:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} = 14\sqrt{5};$

c) Ta có: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 12}{4 \cdot 14\sqrt{5}} = \frac{27\sqrt{5}}{10}$;

d) $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14\sqrt{5}}{14} = \sqrt{5}$

Câu 11. Cho ΔABC có $\hat{A} = 135^\circ, \hat{C} = 15^\circ$ và $b = 12$. Khi đó:

a) $\hat{B} = 30^\circ$.

b) $a = 12\sqrt{2}$;

c) $c \approx 8,21$;

d) $R = 15$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Ta có: $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$.

b)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 135^\circ} = \frac{12}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ} = 2R$$

$$a = \frac{12 \cdot \sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 12\sqrt{2};$$

$$c) \ c = \frac{12 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 6,21$$

$$d) \ R = \frac{12}{2 \sin 30^\circ} = 12$$

Câu 12. Cho tam giác ABC , biết $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Khi đó:

a) $\sin A = \frac{4}{5}$

b) $S = 14$

c) $a = 3\sqrt{2}$

d) $r = 4 - \sqrt{2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Ta có: $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ (vì $\sin A > 0$).

$$b) S = \frac{1}{2}bc \sin A = 14$$

$$c) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}.$$

$$d) \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{5\sqrt{2}}{2}; p = \frac{a+b+c}{2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{6 + 2\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

Câu 13. Cho ΔABC từ có $AB = 3, AC = 4$, diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Khi đó:

$$a) BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$b) \sin A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \cos A = -\frac{1}{2}$$

$$d) BC = \sqrt{37}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

$$a) BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$b) \text{Ta có: } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB \cdot AC} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$c) \cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ \cos A = -\frac{1}{2} \end{cases}; \text{Chọn } \cos A = -\frac{1}{2}$$

$$d) \text{Với } \cos A = -\frac{1}{2}: BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 37 \Rightarrow BC = \sqrt{37}.$$

Câu 14. Cho ΔABC có $BC = \sqrt{6}, CA = 2, AB = 1 + \sqrt{3}$. Khi đó:

$$a) \hat{A} = 30^\circ$$

$$b) \hat{B} = 35^\circ$$

$$c) S = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$d) R = \sqrt{2}.$$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$$a) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ;$$

$$b) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

$$c) S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}; S = \frac{1}{2}BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2S}{BC};$$

$$d) S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \sqrt{2}$$

Câu 15. Cho tam giác ABC . Khi đó:

$$a) a = b \cos C + c \cos B$$

$$b) \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

$$c) h_a = 2R \sin B \sin C$$

$$d) b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

$$a) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. VP = b \cos C + c \cos B = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a = VP(dpcm).$$

$$b) \sin B = \frac{b}{2R}; \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$VP = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \frac{b}{2R} \cdot \cos C + \frac{c}{2R} \cdot \cos B = \frac{1}{2R} (b \cos C + c \cos B)$$

$$(mà a = b \cos C + c \cos B, chứng minh câu a). = \frac{1}{2R} \cdot a = VP(dpcm).$$

$$c) S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow h_a = \frac{bc \sin A}{a} = \frac{2R \sin B \cdot 2R \sin C \cdot \sin A}{2R \sin A} = 2R \sin B \sin C = VP(dpcm).$$

$$d) a(b \cos C - c \cos B) = ab \cdot \cos C - ac \cdot \cos B = ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2}{2} = b^2 - c^2.$$

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$ và $AB = 5, AD = 8$. Tính độ dài đường chéo AC .

Trả lời: 11,4

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $BC = AD = 8, \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 129$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{129} \approx 11,4.$$

Câu 2: Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Trả lời: 4,04

Lời giải

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 49$$

$$\Rightarrow BC = 7.$$

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{7}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4,04$$

Câu 3: Cho tam giác ABC có $a = 7 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$. Hãy tính độ dài đường trung tuyến m_a của tam giác đã cho.?

Trả lời: 6,14

Lời giải

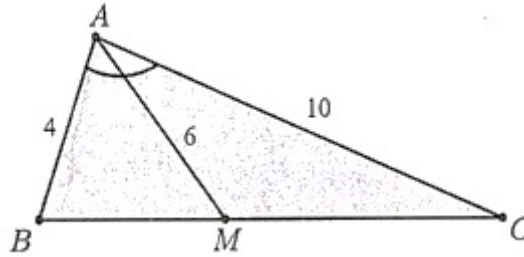
Ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(8^2 + 6^2) - 7^2}{4} = \frac{151}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{151}}{2} \approx 6,14$$

Câu 4: Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC ?

Trả lời: 9,38

Lời giải



Ta có: $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

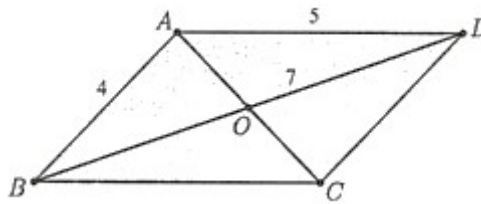
$$\Rightarrow BC^2 = 4 \left(\frac{AB^2 + AC^2}{2} - AM^2 \right) = 4 \left(\frac{4^2 + 10^2}{2} - 6^2 \right) = 88 \Rightarrow BC = 2\sqrt{22} \approx 9,38$$

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, BC = 5, BD = 7$. Tính AC .

Trả lời: 5,74

Lời giải

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC = 5$.



Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình bình hành, suy ra O là trung điểm BD .

Xét $\triangle ABD$: $OA^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$

$$= \frac{4^2 + 5^2}{2} - \frac{7^2}{4} = \frac{33}{4} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Do đó: $AC = 2OA = \sqrt{33} \approx 5,74$

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 9, BC = 10, AC = \sqrt{73}$. Kéo dài BC một đoạn $CI = 5$. Tính độ dài AI

Trả lời: $AI = 12$

Lời giải

- Xét $\triangle ABC$, ta có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 9^2 - (\sqrt{73})^2}{2 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{3}{5}$

- Xét $\triangle ABI$, ta có:

$$AI^2 = AB^2 + BI^2 - 2 \cdot AB \cdot BI \cdot \cos B = 9^2 + (10+5)^2 - 2 \cdot 9 \cdot (10+5) \cdot \frac{3}{5} = 144$$

$$\Rightarrow AI = 12$$

Câu 7: Cho tam giác ABC , có $AB=8, AC=9, BC=10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM=7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trả lời: 7,41

Lời giải

Xét $\triangle ABC$:

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{83}{160} \cdot AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B$$

$$= 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{83}{160} = \frac{549}{10} \Rightarrow AM = \frac{3\sqrt{610}}{10} \approx 7,41.$$

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB=6cm, AC=8cm$ và M là trung điểm của BC . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM

Trả lời: 3,13

Lời giải

$$AB=6cm, AC=8cm \Rightarrow BC=10cm, AM=BM=\frac{1}{2}BC=5cm$$

$$p = \frac{6+5+5}{2} = 8$$

$$S_{ABM} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12; S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \frac{25}{8} \approx 3,13$$

Câu 9: Cho $\triangle ABC$ có $AB=8, AC=5, \widehat{BAC}=60^\circ$. Tính chiều cao AH của $\triangle ABC$

Trả lời: 4,95

Lời giải

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} = 7; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = 10\sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Leftrightarrow 10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AH \Leftrightarrow AH = \frac{20\sqrt{3}}{7} \approx 4,95$$

Câu 10: Cho tam giác nhọn ABC có $a=3, b=4$ và diện tích $S=3\sqrt{3}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Trả lời: 2,08

Lời giải

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C \Rightarrow \sin C = \frac{2S}{ab} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{13}; \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{\sqrt{13}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{39}}{3} \approx 2,08$$

Câu 11: Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}, AC=4, BC=5$. Tính cạnh AB .

Trả lời: 6

Lời giải

Vì trong tam giác ABC ta có $\hat{A} + \hat{B}$ bù với góc $\hat{C}$ nên $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$

$$\cos(A+B) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8}; AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8}} = 6$$

Câu 12: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5,12,13. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

Trả lời: 4,62

Lời giải

Đặt $a=5, b=12, c=13$. Nửa chu vi của tam giác là: $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$

Diện tích của tam giác là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = 30.$$

Cách khác: vì $5^2 + 12^2 = 13^2$ nên tam giác đã cho vuông, $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$

Đường cao ứng với cạnh lớn nhất là: $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 30}{13} = \frac{60}{13} \approx 4,62.$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$ và $a=10$. Tính chu vi tam giác đó.

Trả lời: 24

Lời giải

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C}.$$

Theo định lý sin trong tam giác ta tính được $b=8, c=6$.

Chu vi tam giác là $a+b+c=24$.

Câu 14: Tam giác ABC có $AB=1, AC=3, \widehat{A}=60^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Trả lời: 1,53

Lời giải

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1,53.$$

Câu 15: Cho tam giác ABC nhọn có $BC=3a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=a\sqrt{3}$. Tính số đo góc $\widehat{A}$.

Trả lời: 60

Lời giải

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{3a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{A}=60^\circ$ (do tam giác ABC nhọn).

Câu 16: Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $2a \sin B = b\sqrt{3}$. Tính số đo góc $\widehat{A}$.

Trả lời: 60

Lời giải

$$\text{Có } a \sin B = b \sin A \text{ nên } 2a \sin B = b\sqrt{3} \Leftrightarrow 2b \sin A = b\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\widehat{A}=60^\circ$ (Do ABC là tam giác nhọn).

Câu 17: Cho tam giác ABC có góc $A = 30^\circ$, góc $B = 45^\circ$. Tính $\frac{h_a}{h_b}$.

Trả lời: 1,42

Lời giải

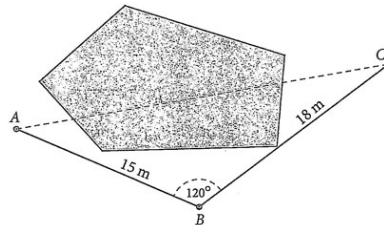
$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}.$$

Theo định lý sin có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$

Vậy $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \sqrt{2} \approx 1,42.$

Câu 18: Để kéo dây điện từ cột điện vào nhà phải qua một cái ao, anh Nam không thể đo độ dài dây điện cần mua trực tiếp được nên đã làm như sau: Lấy một điểm B như trong hình, người ta đo được độ dài từ B đến A (nhà) là $15m$, từ B đến C (cột điện) là $18m$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Hãy tính độ dài dây điện nối từ nhà ra đến cột điện.

Trả lời: 28,62 m.



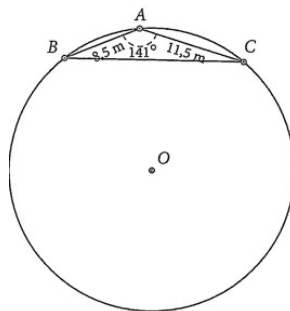
Lời giải

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos 120^\circ} \approx 28,62(m).$$

Vậy độ dài dây điện nối từ nhà ra cột điện dài 28,62 m.

Câu 19: Để đo đường kính một hồ hình tròn, người ta làm như sau: Lấy ba điểm A, B, C như hình vẽ, sao cho $AB = 8,5m$; $AC = 11,5m$; $\widehat{BAC} = 141^\circ$. Hãy tính đường kính của hồ nước đó.



Trả lời: 30m.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

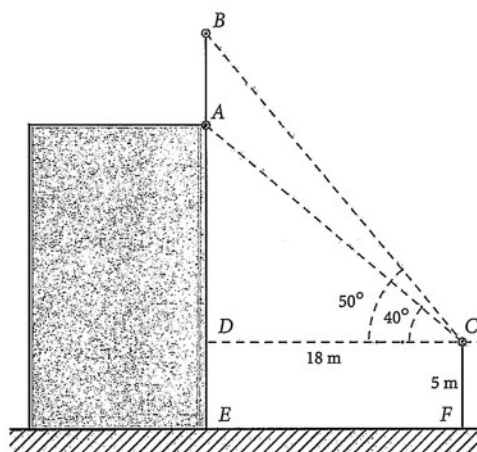
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{8,5^2 + 11,5^2 - 2 \cdot 8,5 \cdot 11,5 \cdot \cos 141^\circ} \approx 18,88(m).$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} \approx \frac{18,88}{2 \cdot \sin 141^\circ} \approx 15(m).$$

Do đó, $d = 2R \approx 15 \cdot 2 = 30(m)$.

Vậy đường kính của hồ nước khoảng 30m.

Câu 20: Để đo chiều cao của một cột cờ trên đỉnh một toà nhà anh Bắc đã làm như sau: Anh đứng trên một đài quan sát có tầm quan sát cao 5m so với mặt đất, khi quan sát anh đo được góc quan sát chân cột là 40° và góc quan sát đỉnh cột là 50° , khoảng cách từ chân toà nhà đến vị trí quan sát là 18m. Tính chiều cao cột cờ và chiều cao của toà nhà.



Trả lời: khoảng 6,34 m.

Lời giải

Trong tam giác DAC , ta có:

$$\cos \widehat{ACD} = \frac{DC}{AC}, \text{ suy ra } AC = \frac{DC}{\cos A} = \frac{18}{\cos 40^\circ} \approx 23,5(m).$$

$$\tan \widehat{ACD} = \tan 40^\circ = \frac{AD}{DC}, \text{ suy ra } AD = DC \cdot \tan 40^\circ = 18 \cdot \tan 40^\circ \approx 15,10(m).$$

Vậy chiều cao của toà nhà là: $AE = AD + DE = AD + CF \approx 15,10 + 5 = 20,1(m)$.

Trong tam giác DBC ta có:

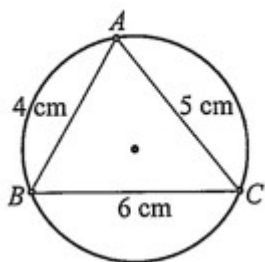
$$\cos \widehat{BCD} = \frac{DC}{BC}, \text{ suy ra } BC = \frac{DC}{\cos B} = \frac{18}{\cos 50^\circ} \approx 28(m).$$

Lại có góc $\widehat{ACB} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$, áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$AB = \sqrt{CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos ACB} \\ \approx \sqrt{23,5^2 + 28^2 - 2 \cdot 23,5 \cdot 28 \cdot \cos 10^\circ} \approx 6,34(m).$$

Vậy chiều cao của cột cờ khoảng 6,34 m.

Câu 21: Từ một miếng bìa hình tròn, bạn Nam cắt ra một hình tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = 4cm, AC = 5cm, BC = 6cm$ (Hình). Tính bán kính R của miếng bìa ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị xăng-ti-mét)



Trả lời: $\approx 3(cm)$

Lời giải

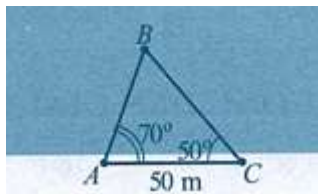
Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}. \quad \text{Mà } \hat{A} < 180^\circ \quad \text{nên}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{Áp dụng định lí sin, ta có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}} \approx 3(cm).$$

Câu 22: Để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ sông đến vị trí B của con tàu bị mắc cạn gần một cù lao giữa sông, bạn Minh đi dọc bờ sông từ vị trí A đến vị trí C cách A một khoảng bằng $50m$ và đo các góc $\widehat{BAC} = 70^\circ$, $\widehat{BCA} = 50^\circ$. (Hình). Tính khoảng cách AB theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



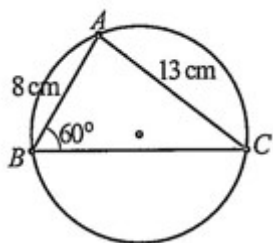
Trả lời: $\approx 44(m)$

Lời giải

Xét tam giác ABC , ta có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC \sin C}{\sin B} = \frac{50 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 44(m)$

Câu 23: Từ một tấm bìa hình tròn, bạn Thảo cắt ra một hình tam giác có các cạnh $AB = 8cm$, $AC = 13cm$ và $\widehat{B} = 60^\circ$ (Hình). Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của miếng bìa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị xăng-ti-mét).



Trả lời: $\approx 7,5(cm)$

Lời giải

Đặt $BC = x(cm)(x > 0)$.

Áp dụng định lí côsin ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$

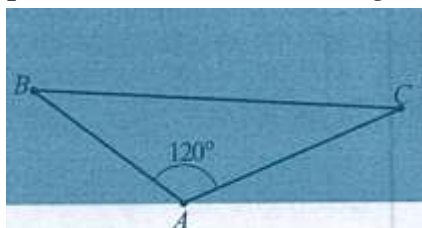
Suy ra $13^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow x^2 - 8x - 105 = 0$.

Giải phương trình trên ta được $x = 15$ hoặc $x = -7$. Vì $x > 0$ nên $x = 15$.

Suy ra $BC = 15(cm)$. Áp dụng định lí sin ta có:

$\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{13}{2 \sin 60^\circ} \approx 7,5(cm)$.

Câu 24: Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 120° (Hình). Tàu thứ nhất đi với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với tốc độ 10 hải lí một giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là 60 hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị giờ)?



Trả lời: 3,8 giờ

Lời giải

Giả sử sau x (giờ) ($x > 0$) tàu thứ nhất ở vị trí B , tàu thứ hai ở vị trí C và khoảng cách $BC = 60$ (hải lí).

Ta có: $AB = 8x$ (hải lí); $AC = 10x$ (hải lí). Áp dụng định lí côsin, ta có:

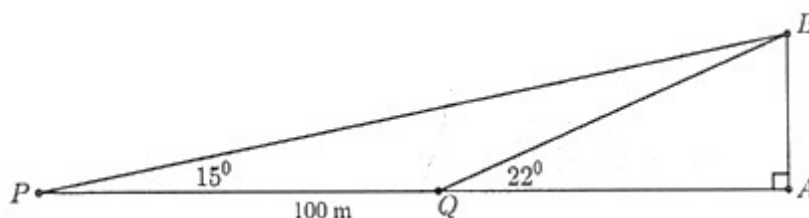
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 60^2 = (8x)^2 + (10x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 10x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 244x^2 = 3600 \Rightarrow x \approx 3,8.$$

Vậy sau 3,8 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là 60 hải lí.

Câu 25: Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 100m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ra nhìn chiều cao AB của

tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 15^\circ$ và $\widehat{BQA} = 22^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp?



Trả lời: khoảng 79,56m

Lời giải

$\triangle ABP$ và $\triangle ABQ$ vuông tại A nên $AP = AB \cdot \cot 15^\circ$, $AQ = AB \cdot \cot 22^\circ$.

$$\text{Suy ra: } PQ = AP - AQ = AB \cdot \cot 15^\circ - AB \cdot \cot 22^\circ = AB(\cot 15^\circ - \cot 22^\circ)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{PQ}{\cot 15^\circ - \cot 22^\circ} = \frac{100}{\cot 15^\circ - \cot 22^\circ} \approx 79,56 m.$$

Vậy tháp hải đăng có chiều cao xấp xỉ $79,56 m$.

Câu 26: Biết hai lực cùng tác động vào một vật tạo với nhau góc 40° . Cường độ của hai lực đó là $3 N$ và $4 N$. Tính cường độ của lực tổng hợp?

Trả lời: khoảng $6,59 N$

Lời giải

Giả sử vật được đặt ở vị trí A , hai lực tác động vào A lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ có độ lớn là $3 N, 4 N$.

Vẽ hình bình hành $ABCD$, ta có hợp lực tác động vào A là: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC = 4$.

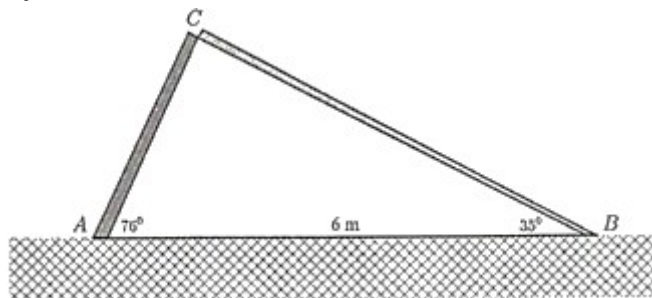
Ta có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Xét tam giác ABC , theo định lí cô-sin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 140^\circ \approx 43,39$$

$$\Rightarrow AC \approx 6,59.$$

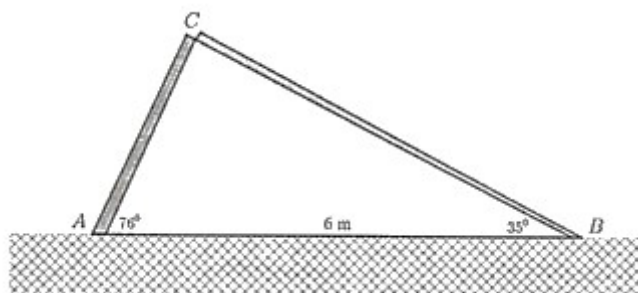
Vậy độ lớn của lực tổng hợp tác động vào vật A là xấp xỉ $6,59 N$.

Câu 27: Một cái cây dạng thẳng đứng bị gió mạnh làm gãy không hoàn toàn (hai đoạn thân bị gãy vẫn dính liền nhau như hình vẽ). Một người muốn đo chiều cao của cây trước khi gãy, người ấy đo được đoạn thẳng nối từ gốc cây đến ngọn cây (đã ngã) là $AB = 6 m$, hai góc $\widehat{CAB} = 76^\circ, \widehat{CBA} = 35^\circ$. Tính chiều dài của cây trước khi bị gãy (giả sử sự biến dạng lúc gãy không ảnh hưởng đến tổng độ dài của cây)?



Trả lời: khoảng $9,93 m$

Lời giải



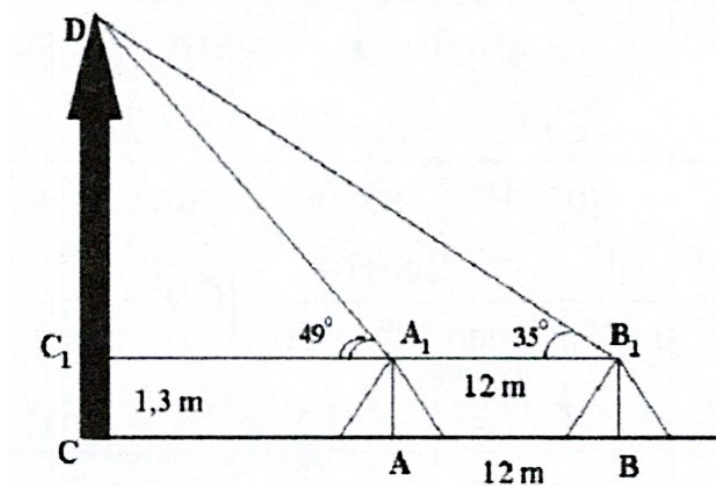
Ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (76^\circ + 35^\circ) = 69^\circ$.

Theo định lí sin: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{6 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 3,69m$;

$\Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{6 \cdot \sin 76^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 6,24m \Rightarrow AC + BC \approx 9,93m$.

Vậy chiều cao ban đầu của cây xấp xỉ bằng $9,93m$.

Câu 28: Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12m$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3m$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



Trả lời: $\approx 22,77m$

Lời giải

Ta có: $\widehat{C_1DA_1} = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$; $\widehat{C_1DB_1} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, nên $\widehat{A_1DB_1} = 14^\circ$.

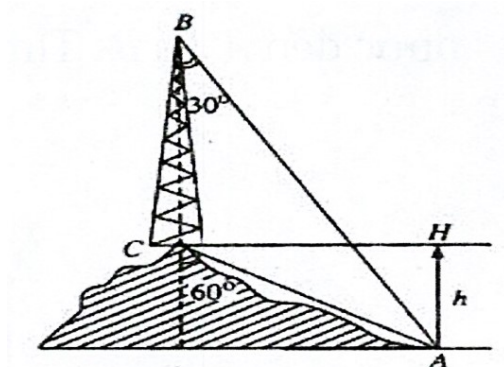
Xét tam giác A_1DB_1 , có: $\frac{A_1B_1}{\sin \widehat{A_1DB_1}} = \frac{A_1D}{\sin \widehat{A_1B_1D}} \Rightarrow A_1D = \frac{12 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28,45 m$.

Xét tam giác C_1A_1D vuông tại C_1 , có:

$$\sin \widehat{C_1A_1D} = \frac{C_1D}{A_1D} \Rightarrow C_1D = A_1D \cdot \sin C_1A_1D = 28,45 \cdot \sin 49^\circ \approx 21,47 m$$

$$\Rightarrow CD = C_1D + CC_1 \approx 22,77 m.$$

Câu 29: Trên ngọn đồi có một cái tháp cao $100m$ (hình vẽ). Đỉnh tháp B và chân tháp C lần lượt nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 30° và 60° so với phương thẳng đứng. Tính chiều cao AH của ngọn đồi.



Trả lời: $50m$

Lời giải

$\widehat{ACB} = 120^\circ; \widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ$. Nên $\triangle ABC$ cân tại $C \Rightarrow AC = BC = 100$

Trong tam giác vuông AHC : $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = AC \cdot \sin 30^\circ = 50 m$.

Câu 30: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $20km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $30km/h$. Hỏi sau 3 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

Trả lời: $30\sqrt{7}$

Lời giải

Ta có quãng đường tàu thứ nhất đi được là $s_1 = v_1 t = 20 \cdot 3 = 60(km)$.

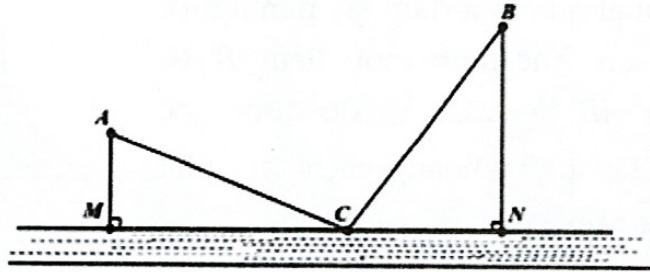
Quãng đường tàu thứ hai đi được là $s_2 = v_2 t = 30 \cdot 3 = 90(km)$.

ΔABC với B là vị trí tàu thứ nhất chạy đến sau 3 giờ, nghĩa là $AB = s_1 = 60 \text{ km}$; C là vị trí tàu thứ hai chạy đến sau 3 giờ, nghĩa là $AC = s_2 = 90 \text{ km}$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow BC^2 = 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 6300. \text{ Vậy khoảng cách hai tàu sau 3 giờ chạy là } BC = 30\sqrt{7}.$$

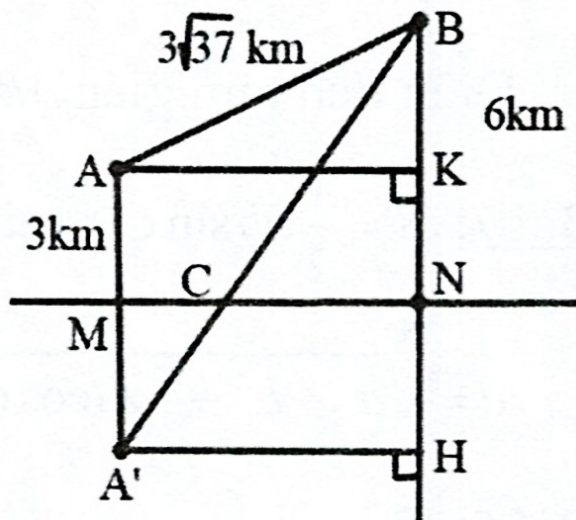
Câu 31: Thành phố Hải Đông dự định xây dựng một trạm nước sạch để cung cấp cho hai khu dân cư A và B . Trạm nước sạch đặt tại vị trí C trên bờ sông. Biết $AB = 3\sqrt{17} \text{ km}$, khoảng cách từ A và B đến bờ sông lần lượt là $AM = 3 \text{ km}$, $BN = 6 \text{ km}$ (hình vẽ). Gọi T là tổng độ dài đường ống từ trạm nước đến A và B . Tìm giá trị nhỏ nhất của T .



Trả lời: khoảng 20,12 km

Lời giải

Kẻ $AK \perp BN$; $A'H \perp BN$.



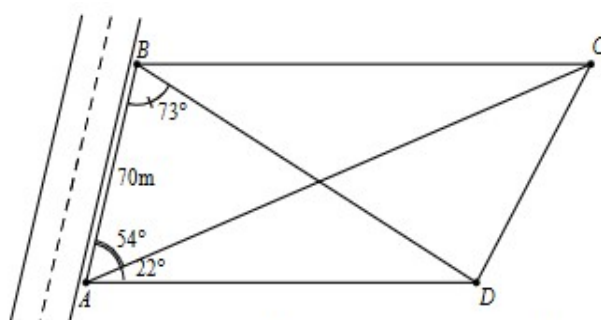
Gọi A' đối xứng với A qua MN , D là trung của NB .

$T = CA + CB = CA' + CB \geq A'B$ (không đổi). Đẳng thức xảy ra khi $\{C\} = MN \cap A'B$.

$$MN = AK = A'H = \sqrt{AB^2 - KB^2} = \sqrt{(3\sqrt{37})^2 - 3^2} = 18 \text{ km}.$$

$$\text{Vậy } A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5} \approx 20,12 \text{ km}.$$

Câu 32: Ông An vừa được cấp một mảnh đất trồng lúa có dạng hình thang ABCD với $AD \parallel BC$ (xem minh họa hình bên dưới). Cạnh AB dọc theo đường đi và có độ dài 70m. Sử dụng giác kế, người ta đo được các góc $\widehat{DAC} = 22^\circ$, $\widehat{BAC} = 44^\circ$ và $\widehat{ABD} = 73^\circ$



Hãy giúp ông An tính gần đúng diện tích mảnh đất (đơn vị mét vuông, kết quả chính xác đến hàng đơn vị)

Trả lời: 9548

Lời giải

Ta có $\widehat{BAD} = 54^\circ + 22^\circ = 76^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$, $\widehat{ACB} = \widehat{DAC} = 22^\circ$.

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC, ta có

$$\frac{AC}{\sin 104^\circ} = \frac{AB}{\sin 22^\circ} \Rightarrow \frac{AC}{\sin 104^\circ} = \frac{70 \cdot \sin 104^\circ}{\sin 22^\circ} \text{ Suy ra diện tích tam giác ABC là}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 54^\circ = \frac{70 \cdot \sin 104^\circ \cdot \sin 54^\circ}{2 \cdot \sin 22^\circ}.$$

Lại có $\widehat{ADB} = 180^\circ - 76^\circ - 73^\circ = 31^\circ$.

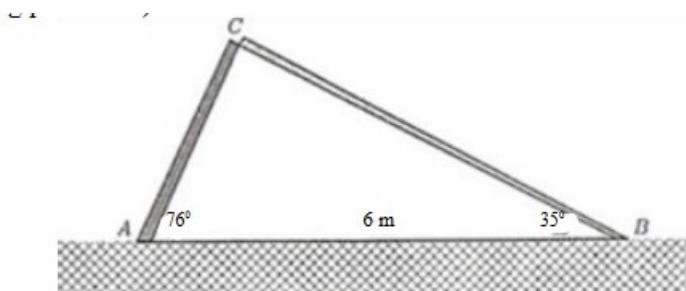
Áp dụng định lý sin cho tam giác ABD, ta

$$\text{có } \frac{AD}{\sin 73^\circ} = \frac{AB}{\sin 31^\circ} \Rightarrow AD = \frac{70 \cdot \sin 73^\circ}{\sin 31^\circ} \approx 129,97 \text{ (m)}.$$

$$\text{Suy ra diện tích tam giác ACD là } S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin 22^\circ = \frac{70^2 \cdot \sin 104^\circ \cdot \sin 73^\circ}{2 \cdot \sin 22^\circ \cdot \sin 31^\circ}.$$

Vậy diện tích mảnh đất là $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \approx 9548 \text{ (m}^2\text{)}$.

Câu 32: Một cái cây dạng thẳng đứng bị gió mạnh làm gãy không hoàn toàn (hai đoạn thân bị gãy vẫn dính liền nhau như hình vẽ). Một người muốn đo chiều cao của cây trước khi gãy, người ấy đo được đoạn thẳng nối từ gốc cây đến ngọn cây (đã ngã) là $AB = 6\text{ m}$, hai góc $\widehat{CAB} = 76^\circ$, $\widehat{CBA} = 35^\circ$. Tính chiều dài của cây trước khi bị gãy (đơn vị: mét), giả sử sự biến dạng lúc gãy không ảnh hưởng đến tổng độ dài của cây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Đáp án: 9,92

Lời giải

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 76^\circ - 35^\circ = 69^\circ.$$

Theo định lý Sin có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow BC = \frac{6 \cdot \sin 76^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 6,236 \text{ (m)}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{CA}{\sin B} \Leftrightarrow CA = \frac{6 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 3,686 \text{ (m)}$$

Chiều dài cây lúc đầu là: $BC + CA \approx 9,922$.

Câu 33: Người ta cần trang trí một họa tiết như hình vẽ bằng cách sơn kín phần được tô đậm. Biết chi phí để sơn 1 mét vuông là 250 nghìn đồng, tam giác trong hình vẽ có các cạnh lần lượt là 3 mét, 5 mét, 5 mét. Hỏi số tiền cần bỏ ra là bao nhiêu nghìn đồng để hoàn thành việc sơn trang trí họa tiết đó (làm tròn đến đơn vị).



Trả lời: 837

Lời giải

Dùng công thức Heron ta tính được diện tích của tam giác là $S_1 = \frac{3\sqrt{91}}{4} \approx 7,15 \text{ m}^2$.

Ta có: $S_1 = pr$ ta tính được bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r = \frac{3\sqrt{91}}{26} \approx 1,1$ m.

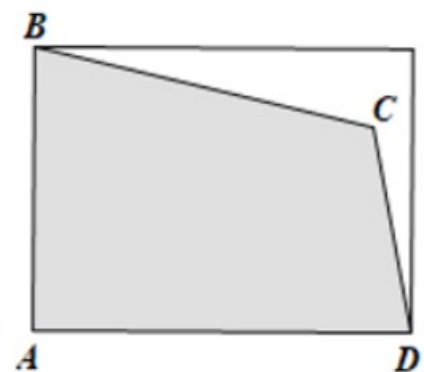
Tính được diện tích hình tròn là $S_2 = \pi r^2 = \frac{63\pi}{52} \text{ m}^2$.

Diện tích cần sơn là

$$S = S_1 - S_2 = \frac{3\sqrt{91}}{4} - \frac{63}{52}\pi \approx 3,348 \text{ m}^2.$$

Số tiền cần bỏ ra bằng $S \cdot 250 \approx 837$ nghìn đồng.

Câu 33: Một mảnh đất hình chữ nhật bị xén đi một góc (hình vẽ), phần còn lại có dạng hình tứ giác ABCD với độ dài các cạnh là $AB = 15\text{m}$, $BC = 19\text{m}$, $CD = 10\text{m}$, $DA = 20\text{m}$. Diện tích mảnh đất ABCD bằng bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Nối B với D.

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 15^2 + 20^2 = 625 \Rightarrow BD = 25$ (m).

Xét $\triangle BCD$ có nửa chu vi là: $p = \frac{BC + CD + DB}{2} = \frac{19 + 10 + 25}{2} = 27$ (m).

Áp dụng công thức Heron ta có:

$$S_{ABCD} = \sqrt{p(p - BC)(p - CD)(p - DB)} = \sqrt{27 \cdot (27 - 19)(27 - 10)(27 - 25)}$$

$$= \sqrt{27 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 2} = \sqrt{7344} = 12\sqrt{51} \approx 86(m^2). \text{ Lại có: } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150(m^2)$$

Suy ra $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} \approx 150 + 86 = 236(m^2)$.